

# Physics for Computer Science Students

## Lecture 9

### Thermodynamics

Romuald Kotowski

Department of Applied Informatics

PJIIT 2009

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# Fundamental notions

**Thermodynamics** it is a science about energy. It is a part of physics dealing with the studying of the energy effects connected with the every physical and chemical transitions and influencing the changes of the internal energy of the analyzed systems.

It follows, that thermodynamics deals with the energetic transitions in chemical reactions, phase transitions, nuclear transitions and electric energy and not in the heat transitions only.

# Fundamental notions

During the historical development of science the thermodynamics was divided into more specific parts taking into account the progress in the research or the practical applications. We have:

- classical thermodynamics
- quantum thermodynamics
- statistical thermodynamics
- technical thermodynamics
- chemical thermodynamics
- thermodynamics of non-equilibrium processes

# Fundamental notions

**System** – a body, a tool, an arrangement, or any object, to which the thermodynamical considerations are applied and which is considered as a unit.

**Thermodynamical system** – mutual interactions with the environment where the exchange of the heat and work are considered only – model of thermodynamical considerations.

**State of the system** – the assembly of all of its properties in the given conditions; in the equilibrium state these properties do not change or change very slowly.

# Fundamental notions

**Internal energy**  $U$  – sum of the kinetic and potential energies of the motion of particles interacting inside a body, intramolecular interactions and thermal motion of particles.

*It is not a heat!*

**Heat** transfers from the warmer to the cooler body. Heat – it is not energy posses by a body – it is the energy transferring from one body to the another one.

**The body has not a heat, it has the inner energy only!**

# Fundamental notions

An example of the chaotic motion of the gas molecules:

Show thermal motion

## Fundamental notions

The heat and cold were treated as the separate qualities, i.e. the cold was not noticed as a small quantity of heat.

**Example:** Jean Baptiste Morin (1583 - 1656) has considered, that the heat and the cold have certain maximal values that are impossible to exceed, and certain minimal values that can not be reduced. He has arbitrarily assumed that

$$\text{degree of heat} + \text{degree of cold zimna} = 8$$

The heat and work are not the thermal properties of the state of the system. We are interested in such properties which depend on the inflow of the heat or the work, like temperature, pressure, volume, specific heat capacity, internal energy... – the characteristic state parameters.



# Temperature

Temperature is the measure of "willingness" to share the heat. If two bodies have the same temperature, then in the direct contact the heat is not transferred. If the temperatures are different then the heat is transferred from the body with the higher temperature to the body with the lower temperature. The process continues as long as the temperatures become equal.

# Temperature

If the body  $A$  in the contact with the body  $B$  gives the heat, it means the body  $A$  has the higher temperature than the body  $B$ .

If the bodies  $B$  and  $C$  are in the thermal equilibrium are in the thermal equilibrium with the body  $A$ , so they all have the same temperature.

It is very easy to establish which body has the higher temperature, and it is much more difficult to define the scale of temperatures, i.e. to define the temperature quantitatively.

# Temperature

The beginnings of the temperature measurements (thermometry)

**The first air thermoscopes:**

Galileo Galilei (1603 ?)

Santorio Santori (1611)

Cornelius Drebbel (>1606)

Robert Fludd (1617 ?)

**The first liquid thermometer**

Jean Rey (1631)

# Temperature

## The beginnings of the temperature measurements

### Constant points:

1665 Boyle – freezing of the oil of anise

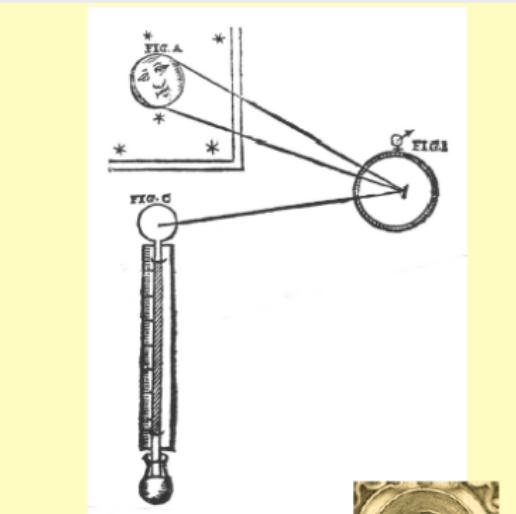
Huygens – freezing (or boiling) of the water

Hooke – freezing of the water

1688 Dalencé – melting of the snow ( $-10^\circ$ ) and melting of the butter ( $+10^\circ$ )

1694 Renaldini – freezing and boiling of the water (the range of  $120^\circ$ )

# Temperature



Santorio 1611

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# Empirical scale of temperatures

## Celsius scale

The relative thermal expansion of mercury with respect to glass (from Jena) was exploited. The thermometer consists of the glass container filled with the mercury and closed with a long capillary tube of the constant cross section. Until 1954 the thermometer marking was made by the establishing on the thermometer scale two points (dashes):

- ①  $0^{\circ}\text{C}$ , for the equilibrium of ice with water filled with the air under the normal atmospheric pressure (over the free water surface there is an air);
- ②  $100^{\circ}\text{C}$ , for the equilibrium state with the boiling water under the constant pressure.

The distance between these two dashes is divided into 100 equal parts. For the deeper temperatures the mercury thermometer in the quartz pot is filled additionally with the nitrogen under the higher pressure, what causes that the boiling temperature of mercury is higher. For the deeper temperatures the thermometer are filled with pentane, what enables the temperature measurements till the  $-100^{\circ}\text{C}$ .



# Empirical scale of temperatures

## Gas thermometer

consists of the glass pot filled with gas (helium or hydrogen) closed with a long capillary tube and connected with the rubber pipe filled with mercury and ending with the glass pipe. If the volume of the gas in the pot is constant, so accordingly to the Charles law the gas pressure is the linear function of the temperature

$$p(T) = p_0(1 + \alpha T), \quad (1)$$

$p_0$  – gas pressure at the  $0^\circ\text{C}$  temperature, and

$$p_0 = b + h_0, \quad (2)$$

$b$  – atmospheric pressure,  $h_0$  – difference of the mercury level at the both arms of the thermometer.



# Empirical scale of temperatures

## Absolute scale of temperature

The coefficient of the gas expansion

$$\alpha = \frac{1}{273,15} = 0,0036604. \quad (3)$$

Making extrapolation (1) to the value  $p = 0$ , one obtains

$$T = -273,15^{\circ}\text{C}. \quad (4)$$

It is **the absolute zero of the temperature** in the Kelvin scale

$$T^{\circ}\text{K} = 273,15 + T^{\circ}\text{C}. \quad (5)$$

# Empirical scale of temperatures

## The Fahrenheit scale

**The Fahrenheit scale** is mainly used in the USA. It was proposed in 1715 by **Daniel Gabriel Fahrenheit**. The zero point was the lowest temperature in winter 1708/1709 in Gdańsk (his family city), and as  $100^{\circ}$  was the temperature of his body. But at that time he was ill and his  $100^{\circ}\text{F}$  was  $37,8^{\circ}\text{C}$ .

In 1724 Fahrenheit's definition of the temperature scale was changed into the following one:

- $0^{\circ}\text{F}$  – the temperature of the mixture of water and ice with the salt,
- $32^{\circ}\text{F}$  – the temperature of the mixture of water and ice (the melting temperature of ice).

# Empirical scale of temperatures

## The Fahrenheit scale

In the Fahrenheit scale, the freezing point of water is  $32^{\circ}\text{F}$  Fahrenheit and the boiling point  $212^{\circ}\text{F}$  (at standard atmospheric pressure), placing the boiling and freezing points of water exactly 180 degrees apart. A degree on the Fahrenheit scale is  $1/180$  of the interval between the freezing point and the boiling point. On the Celsius scale, the freezing and boiling points of water are 100 degrees apart, hence the unit of this scale. A temperature interval of 1 degree Fahrenheit is equal to an interval of  $5/9$  degrees Celsius. The Fahrenheit and Celsius scales converge at -40 degrees (i.e.  $-40^{\circ}\text{F}$  and  $-40^{\circ}\text{C}$  represent the same temperature). Absolute zero is  $-459.67^{\circ}\text{F}$ .

# Empirical scale of temperatures

## Comparison of temperature scales

- Fahrenheit  $\leftrightarrow$  Celsius

$$T_F = 32 + \frac{9}{5} T_C, \quad T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32),$$

- Kelvin  $\leftrightarrow$  Celsius

$$T_K = T_C - 273,15, \quad T_C = T_K + 273,15.$$

# Empirical scale of temperatures

## The Fahrenheit scale



Fig. 2: The thermometer showing the Fahrenheit and Celsius temperatures

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# The first law of thermodynamics

If the thermodynamic system takes the work and no permanent changes occur, it transfers the heat to the environment, and reciprocally.

Jednostki:  $1 \text{ cal} = 0,427 \text{ kGm}$

## I law

**The sum of heat and work obtained by the system equals to the increase of the inner energy.** Inner energy is the state function of the system.

$$dU = dQ + dA . \quad (6)$$

It is a law of conservation of energy

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- **The second law of thermodynamics**
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# The second law of thermodynamics

The I-st law of thermodynamics solves the transition of work and heat partially only. It says, that inner energy increases by the common value of heat and work. When and why it occurs needs some additional considerations.

The experiments show that:

- ① it is impossible to construct a device allowing to create work due to the heat from the one container only without making other changes;
- ② it is impossible to construct a device allowing to transfer heat from the lower to higher temperature without making other changes.

Every of the above statement expresses the second law of thermodynamics.

# Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 – 1832)



Fig. 3: Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 – 1832)

*"Wytwarzanie mocy poruszającej w maszynie parowej nie jest spowodowane zużyciem cieplika, lecz jego przejściem od ciała gorętszego do zimniejszego – to znaczy zachodzi wskutek przywrócenia w nim równowagi, naruszonej przez działanie chemiczne w rodzaju spalania, lub przez jakąś inną przyczynę. Zobaczmy, że ta zasada stosuje się do wszystkich maszyn cieplnych..."*

# Carnot diagram for the ideal gas

Carnot diagram for the ideal gas złożony jest z dwu przemian adiabatycznych i dwu izotermicznych. Poniższy rysunek omówimy na kolejnych stronach.

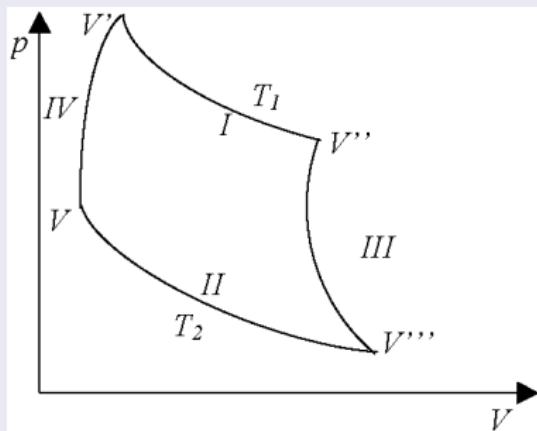


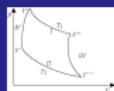
Fig. 4: Carnot diagram

# Carnot diagram for the ideal gas

Musimy tu uwzględnić **prawo Gay-Lussaca** (na razie wynika ono z doświadczenia): energia wewnętrzna gazu doskonałego nie zależy od jego objętości, czyli

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0, \quad U = U(T). \quad (7)$$

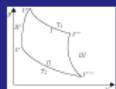
1.



Gaz w temperaturze  $T_2$  sprężamy adiabatycznie, czyli bez dopływu lub odpływu ciepła, od objętości  $V$  do objętości  $V'$  bardzo powoli, aż temperatura osiągnie wartość  $T_1$ . Energia wewnętrzna wzrasta od  $U_2 = U(T_2)$  do  $U_1 = U(T_1)$  kosztem pobranej pracy  $U_1 - U_2$ , ponieważ wymiany ciepła z otoczeniem nie ma (linia  $IV$  na rys. 4).

# Carnot diagram for the ideal gas

2.

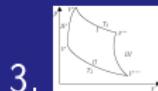


Rozprężamy gaz do objętości  $V''$  izotermicznie przy stałej temperaturze  $T_1$  (linia I na rys. 4), dzięki wymianie ciepła z otoczeniem. Energia wewnętrzna nie ulega zmianie. Praca pobrana

$$\Delta A_I = - \int_{V'}^{V''} p \, dV = -nRT_1 \int_{V'}^{V''} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}, \quad (8)$$

jest ujemna (praca wykonana przez gaz – dodatnia) i musi być skompensowana przez dopływ ciepła z zewnątrz.

# Carnot diagram for the ideal gas



3.

Rozprężamy gaz adiabatycznie do temperatury  $T_2$  i do objętości  $V'''$  (linia III na rys. 4). Energia wewnętrzna zmniejsza się od  $U_1$  do  $U_2$ , wskutek pracy wykonanej przez gaz.

4.

Sprzężamy gaz izotermicznie przy temperaturze  $T_2$  do objętości początkowej  $V$ . Energia wewnętrzna nie ulega zmianie, ponieważ pobrana praca

$$\Delta A_{II} = - \int_{V'''}^V p \, dV = nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}, \quad (9)$$

jest dodatnia i jest skompensowana przez odpowiedni odpływ ciepła.

# Carnot diagram for the ideal gas

Droga	Temperatura	Praca pobrana	Ciepło pobrane
IV	$T_2 \rightarrow T_1$	$U_1 - U_2$	0
I	$T_1$	$-nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}$	$nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}$
III	$T_1 \rightarrow T_2$	$U_2 - U_1$	0
II	$T_2$	$nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}$	$-nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}$
Carnot		I + III	I + III

$T_1$  – temperatura wyższa,  $T_2$  – temperatura niższa,  $U$  – energia wewnętrzna,  $A$  – praca,  $Q$  – ilość ciepła,  $V$  – objętość,  $p$  – ciśnienie,  $R$  – stała gazowa Rydberga  $8,31441 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $n$  – liczba moli

# Reversible and irreversible phenomena

Carnot diagram is reversible, it can run in both directions – is it possible in reality?

One has here the continuous series of equilibrium states, and not series of changes characterizing the real processes.

The system there is in equilibrium if there are not infinitesimally small reversible changes connected with the execution of work. No irreversible process is possible, because there is not work which can be dissipated.

# Entropy

In irreversible and reversible processes running from the state 1 to the state 2 according to the first law of thermodynamics the change of energy takes place

$$dU = dQ_{nieodwr} + dA_{nieodwr}, \quad dU = dQ_{odwr} + dA_{odwr}, \quad (10)$$

because it depends on the start and final states and not on the trajectory. However, work obtained by the system in the irreversible way is greater than in the reversible way, and obtained heat is appropriate smaller.

Ubytek doprowadzonego ciepła zredukowanego na każdej drodze nieodwracalnej jest pokryty przez zużycie pracy  $dq$ , które zawsze ma miejsce w procesach nieodwracalnych. Mamy więc

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{odwr}}{T} = \int_1^2 \frac{dQ_{nieodwr}}{T} + \int_1^2 \frac{dq}{T}. \quad (11)$$

# Entropy

W **przemianach odwracalnych** przyrost entropii układu równy jest ubytkowi entropii zbiorników ciepła zasilających układ.

W **przemianach nieodwracalnych** przyrost entropii układu jest większy niż ubytek entropii zbiorników ciepła.

W układzie rozszerzonym, obejmującym również zbiorniki ciepła, entropia nie ulega zmianie w przemianach odwracalnych, rośnie w przemianach nieodwracalnych.

Zachodzą ważne związki:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{dA}{T}, \quad (12)$$

$$dQ = T dS, \quad dA = dU - T dS. \quad (13)$$

# Table of Contents

## 1 Introduction

## 2 Temperature

- Scales of temperatures

## 3 Laws of thermodynamics

- The first law of thermodynamics
- The second law of thermodynamics
- The third law of thermodynamics

## 4 Thermodynamics of irreversible processes

- Equation of the heat conductivity

# The third law of thermodynamics

Equation (12) does not define the entropy uniquely.: an arbitrary constant added to  $S$  does not change the formula.

It follows from the quantum theory that any arbitrary process in the temperature of  $0^{\circ}\text{K}$  does not increase the entropy.

It is the confirmation of the **Nernst theorem** formulated before the quantum theory was established, (sometimes called the third law of thermodynamics), that

$$S = 0, \quad \text{dla } T = 0^{\circ}\text{K}. \quad (14)$$

# Thermodynamic potentials

Thermodynamic potentials – physical quantities connected with the thermodynamic system, they have the dimension of energy. Name "potential" – because it is the equivalent of the potential energy in mechanics. The four, the mostly used thermodynamic potentials are defined with the assumption that there are pairs of the thermodynamical transformation parameters not changing during the processes. They are:  $(S, V)$ ,  $(T, V)$ ,  $(S, P)$ , or  $(T, P)$ , where  $S$  - entropy,  $V$  - volume,  $P$  - pressure,  $T$  - temperature.

Name of potential	Formula	Parameters
Inner energy	$U$	$S, V, N_i$
Free Helmholtz energy	$A = U - TS$	$T, V, N_i$
Enthalpy	$H = U + PV$	$S, P, N_i$
Free Gibbs enthalpy	$G = U + PV - TS$	$T, P, N_i$

$N_i$  - number of particles of the  $i$ -type. In systems where the the number of paricles of specific types do not change, this parameter is not taken into account.

# Thermodynamics of irreversible processes

Classical thermodynamics distinguish between reversible and irreversible processes, but all the statements deal with the equilibrium states only, and not the courses of the phenomena.

Entropy can be defined for the equilibrium states only, or states infinitely closed to the equilibrium states. może być zdefiniowana tylko dla stanów równowagi lub stanów bardzo bliskich stanowi równowagi. With the notion of entropy all other thermodynamic notions have sense as well. In particular the Gibbs equation

$$TdS = dU + pdV - \sum_i \mu_i dN_i , \quad (15)$$

expressing the connection between the changes of the entropy, internal energy, volume and number of matter moles.



# Table of Contents

- 1 Introduction
- 2 Temperature
  - Scales of temperatures
- 3 Laws of thermodynamics
  - The first law of thermodynamics
  - The second law of thermodynamics
  - The third law of thermodynamics
- 4 Thermodynamics of irreversible processes
  - Equation of the heat conductivity

# Heat conductivity

Przewodnictwo ciepła, to zjawisko przepływu energii pomiędzy nierównomiernie ogrzonymi ciałami.

W przypadku gazu polega ono na wzajemnym przekazywaniu energii molekuł w ich bezładnym ruchu cieplnym, w rezultacie prowadzącym do wyrównywania się (uśredniania) tej energii, a więc i miary ich energii kinetycznej, czyli temperatury.

Dla ciał stałych w mikroskopowym opisie procesu przewodnictwa ciepła istotną rolę pełnią drgania sieci krystalicznej (fonony) i wzajemne oddziaływanie nośników prądu (gaz elektronowy).

## Heat conductivity

W przypadku stacjonarnym, przewodnictwo ciepła opisuje prawo wyrażone równaniem:

$$Q = -\lambda \text{ grad } T ,$$

gdzie:  $Q$  - wektor gęstości strumienia cieplnego,  $\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła,  $T$  - temperatura. Dla ciał stałych

$$\lambda = \lambda_e + \lambda_s ,$$

(odpowiednio współczynniki przewodzenia ciepła dla gazu elektronowego i sieci krystalicznej).

Przewodnictwo ciepła jest jednym ze zjawisk opisywanych przez teorię transportu.

# Heat conductivity

Przewodność cieplna, czyli inaczej nazywany współczynnikiem przewodnictwa ciepła, określa zdolność substancji do przewodzenia ciepła. W tych samych warunkach więcej ciepła przepłynie przez substancję o większym współczynniku przewodności cieplnej. Jednostką współczynnika przewodzenia ciepła w układzie SI jest  $[J/(m \cdot s \cdot K)] = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$  (wat na metr kelwin).

# Heat conductivity

## Przykład

Dla ciała o kształcie prostopadłościanu (pręta) przewodzącego ciepło w warunkach stacjonarnych, ilość przekazanego ciepła jest zależna od substancji, proporcjonalna do przekroju ciała różnicy temperatur oraz czasu przepływu ciepła:

$$\Delta Q = k \frac{S}{L} \Delta t \Delta T ,$$

Z powyższego wynika, że:

$$k = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{L}{S \Delta T} ,$$

gdzie  $k$  - współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $\Delta Q$  - ilość ciepła przepływającego przez ciało,  $\Delta t$  - czas przepływu,  $L$  - długość (ciała) pręta,  $S$  - przekrój poprzeczny pręta,  $\Delta T$  - różnica temperatur w kierunku przewodzenia ciepła.

Wzór ten jest prawdziwy tylko dla wymiany cieplnej odbywającej się tylko przez przewodzenie ciepła. Nie może występować promieniowanie cieplne ani konwekcja.



# Equation of the heat conductivity

Ciepło przepływa od miejsca o wyższej temperaturze do miejsca o niższej temperatury, następuje wyrównanie temperatur i po pewnym czasie następuje równowaga cieplna. Strumień ciepła przez zamkniętą powierzchnię

$$\iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) .$$

Z twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego

$$\iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \iiint \operatorname{div} \mathbf{j} dV .$$

## Equation of the heat conductivity

Energia tracona przez element  $dV$  wskutek przewodnictwa na jednostkę czasu wynosi

$$\operatorname{div} \mathbf{j} dV = -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV.$$

Z drugiej strony w elemencie  $dV$  może powstać lub zniknąć ciepło na skutek różnych innych procesów (reakcje chemiczne, promieniowanie, prąd elektryczny – ciepło Joula). Niech  $f$  – ilość ciepła zyskana w ciągu sekundy na jednostkę objętości.

$$(f - \operatorname{div} \mathbf{j}) dV \quad (16)$$

Tyle jednostek ciepła, idących na ogrzanie ciała, zyskuje element objętości.

# Equation of the heat conductivity

Wzrostowi temperatury  $\partial T / \partial t$  odpowiada dopływ ciepła

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV ,$$

$c$  – ciepło właściwe,  $\rho$  – gęstość ciała. Dopływ ten musi być pokryty przez ilość ciepła (16), czyli

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = f + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) . \quad (17)$$

## Equation of the heat conductivity

Równanie różniczkowe (17) opisuje zjawiska we wnętrzu ciał. Należy uwzględnić jeszcze warunki brzegowe na powierzchni, np. utrzymywanie stałej (lub zmiennej) określonej temperatury w określonych obszarach powierzchni, lub też doprowadzamy lub odprowadzamy strumień ciepła.

## Equation of the heat conductivity

Równanie przewodnictwa cieplnego to równanie różniczkowe cząstkowe z warunkami brzegowymi Dirichleta, opisujące przepływ ciepła przy zadanym jego początkowym rozkładzie w ośrodku.

Równanie ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie  $g(x)$  – początkowy rozkład ciepła,  $u(x, t)$  – szukana zależność rozkładu od czasu  $t$ .

## Solution of the conductivity equation

Poszukujemy rozwiązań w klasie regularności

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)).$$

Rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego jest:

$$E(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right).$$

Można sprawdzić, że spełnia ono warunki:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1,$$

$$E_t - \Delta_x E = 0.$$

# Infinite velocity of the heat propagation

Przypuśćmy, że  $g$  ma zwarty nośnik i na pewnej kuli  $B$  jest  $g > 0$ .  
Wówczas

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) E(x - y, t) \geq 0,$$

dla każdego  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ . Zatem ciepło dochodzi w dowolnie krótkim czasie do każdego punktu przestrzeni, czyli rozchodzi się nieskończenie szybko. Tak oczywiście w rzeczywistości nie jest, dlatego w praktyce często używa się równania przewodnictwa cieplnego z dodatkowymi członami, powodującymi zmianę typu równania różniczkowego.

Koniec? :-)

The end of the lecture 9