

Grafika komputerowa  
Wykład 8

**Modelowanie obiektów graficznych cz. II**

Romuald Kotowski

Instytut Informatyki i Automatyki

Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości w Łomży

2 0 0 9

# Spis treści

- 1 Reprezentacja obiektów graficznych
  - Reprezentacja powierzchni
  - Powierzchnie Béziera
  - Powierzchnie B-sklejane
  - Powierzchnie Coonsa
  - Powierzchnie Gordona

# Spis treści

- 1 Reprezentacja obiektów graficznych
  - Reprezentacja powierzchni
  - Powierzchnie Béziera
  - Powierzchnie B-sklejane
  - Powierzchnie Coonsa
  - Powierzchnie Gordona

# Obiekty graficzne

## Reprezentacja powierzchni

Parametryczne przedstawienie powierzchni

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$x, y, z$  – ciągłe funkcje zmiennej  $(u, v) \in D$ . Najczęściej  $D$  to prostokąt

$$u_0 \leq u \leq u_1, \quad v_0 \leq v \leq v_1$$

$(u, v)$  – współrzędne krzywoliniowe punktu powierzchni

# Obiekty graficzne

## Reprezentacja powierzchni

Po ustaleniu jednej lub drugiej zmiennej ( $u, v$ ) dostajemy przedstawienia krzywych leżących na powierzchni  $S(u, v)$ , a mianowicie

- dla  $v = \tilde{v}$  – linia współrzędnej  $u$

$$Q(u) = S(u, \tilde{v}) = (x(u, \tilde{v}), y(u, \tilde{v}), z(u, \tilde{v}))$$

- dla  $u = \tilde{u}$  – linia współrzędnej  $v$

$$Q(v) = S(\tilde{u}, v) = (x(\tilde{u}, v), y(\tilde{u}, v), z(\tilde{u}, v))$$

# Obiekty graficzne

## Reprezentacja powierzchni

- Wektor styczny do krzywej  $Q(u)$

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \left[ \frac{\partial x(u, \tilde{v})}{\partial u}, \frac{\partial y(u, \tilde{v})}{\partial u}, \frac{\partial z(u, \tilde{v})}{\partial u} \right]$$

- Wektor styczny do krzywej  $Q(v)$

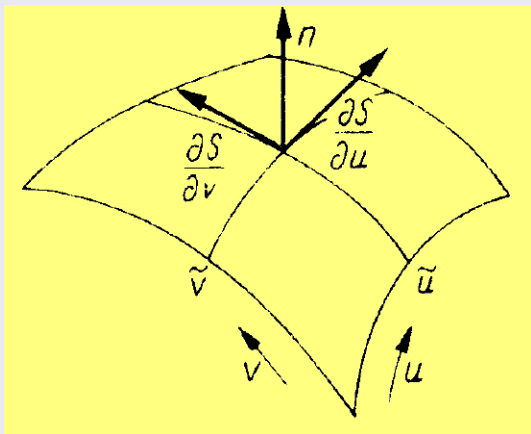
$$\frac{\partial S}{\partial v} = \left[ \frac{\partial x(\tilde{u}, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(\tilde{u}, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(\tilde{u}, v)}{\partial v} \right]$$

- Wektor normalny

$$\mathbf{n} = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$$

## Obiekty graficzne

## Reprezentacja powierzchni



# Obiekty graficzne – helikoida

**Helikoida** – powierzchnia utworzona przez proste prostopadłe do osi  $Oy$  przecinające linię śrubową.

Współrzędne krzywoliniowe  $(u, v)$  dowolnego punktu  $P$  tej powierzchni:

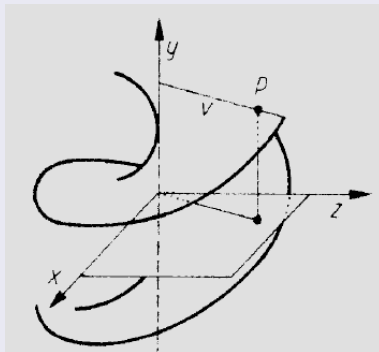
- $u$  – wartość parametru określającego punkt linii śrubowej, przez który przechodzi prosta prostopadła do osi  $Oy$  zawierająca punkt  $P$
- $v$  – wartość drugiego parametru, określającego położenie punktu  $P$  na tej prostej. (rys. 2).

Przedstawienie helikoidy ma wtedy postać:

$$S(u, v) = (v \cos u, h u, v \sin u)$$



## Obiekty graficzne – helikoida



Rys. 2: Helikoida

# Obiekty graficzne – helikoida

Dla ustalonego  $v = \tilde{v}$  linia współrzędnej  $u$  jest linią śrubową o promieniu  $\tilde{v}$ , a przy  $u = \tilde{u}$  linią współrzędnej  $v$  jest prosta o przedstawieniu parametrycznym  $(v \cos \tilde{u}, h \tilde{u}, v \sin \tilde{u})$ . Zatem wektory styczne

$$\frac{\partial S}{\partial u} = (-\tilde{v} \sin u, h, \tilde{v} \cos u), \quad \frac{\partial S}{\partial v} = (\cos \tilde{u}, 0, \sin \tilde{u})$$

i wektor normalny

$$\mathbf{n} = (h \sin \tilde{u}, \tilde{v}, -h \cos \tilde{u})$$

# Obiekty graficzne

## Przedstawienie parametryczne powierzchni

Niech

$$S(u) = \sum_{i=0}^n P_i F_i(u), \quad u_0 \leq u \leq u_1$$

$F_i$  – funkcje bazowe.

Niech każdy ze współczynników – punktów  $P_i$  – porusza się po pewnej krzywej  $P_i(v)$  i niech każdą z tych krzywych ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) można opisać w bazie funkcji  $G_j$

$$P_i(v) = \sum_{j=0}^n P_{i,j} G_j(v), \quad v_0 \leq v \leq v_1$$

# Obiekty graficzne

## Przedstawienie parametryczne powierzchni

Mamy zatem

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{i,j} G_j(v) F_i(u)$$

Iloczyny  $G_j(v)F_i(u)$  – funkcje bazowe. Specyfikując funkcje  $F_i$ ,  $G_j$  otrzymujemy różne rodzaje powierzchni.

# Spis treści

- 1 **Reprezentacja obiektów graficznych**
  - Reprezentacja powierzchni
  - **Powierzchnie Béziera**
  - Powierzchnie B-sklejane
  - Powierzchnie Coonsa
  - Powierzchnie Gordona

## Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P_{i,j} B_j^m(q) B_i^n(r)$$

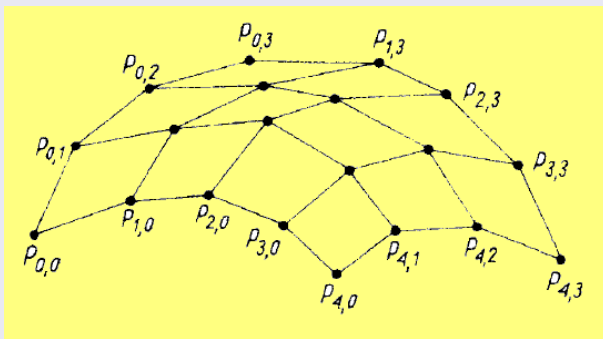
$B_j^m, B_i^n$  – wielomiany Bernsteina odpowiednio stopnia  $m$  i  $n$ ,

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} (1-u)^{n-i} u^i, \quad u \in [0, 1]$$

$P_{i,j}$  – punkty kontrolne (lub punkty Béziera powierzchni. Ich naturalne uporządkowanie ilustruje rys. 3, a przykład fragmentu powierzchni Béziera jest pokazany na rys. 4. Na ogół jedynie narożne punkty  $P_{0,0}$ ,  $P_{0,m}$ ,  $P_{n,0}$  i  $P_{n,m}$  leżą na powierzchni.

## Obiekty graficzne

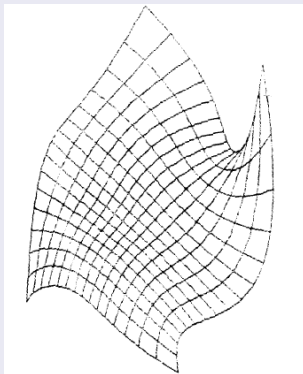
## Powierzchnie Béziera



Rys. 3: Uporządkowanie punktów kontrolnych

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera



Rys. 4: Płat powierzchni Béziera



# Obiekty graficzne

## Właściwości powierzchni Béziera

- Brzegi płata powierzchni Béziera są krzywymi Béziera określonymi przez odpowiednie brzegowe punkty kontrolne tego płata.
- Cały płat powierzchni Béziera leży w powłoce wypukłej punktów  $P_{i,j}$ . Wartości pochodnych cząstkowych, czyli wektory styczne do linii współrzędnych  $u$  lub  $v$ , na brzegu płata zależą tylko od dwóch brzegowych wierszy (lub kolumn) punktów kontrolnych.
- Punkty powierzchni Béziera można wyznaczyć stosując wielokrotnie algorytm de Casteljau do odpowiednich krzywych.

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera dla dziedziny trójkątnej

Porcje powierzchni Béziera mogą być określone w przestrzeni  $uv$  nie tylko na prostokątach, lecz także na trójkątach.

Niech  $T$  będzie trójkątem w płaszczyźnie  $uv$ . Dowolny punkt  $P \in T$  można wyrazić jednoznacznie jako kombinację liniową wierzchołków tego trójkąta

$$P = rA + sB + tC$$

Współczynniki  $r, s, t$  noszą nazwę *współrzędnych barycentrycznych* punktu  $P$ , są nieujemne i w sumie dają 1.

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera dla dziedziny trójkątnej

Trójkątny płat powierzchni Béziera dla  $(u, v) \in T$  definiuje się następująco:

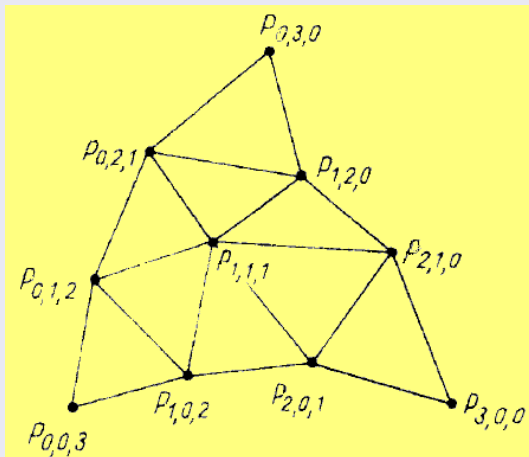
$$S(u, v) = \sum_{i+j+k=n, i,j,k \geq 0} P_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(r, s, t)$$

gdzie  $P_{i,j,k}$  – dane punkty kontrolne,  $B_{i,j,k}^n$  – wielomiany Bernsteina w postaci

$$B_{i,j,k}^n(r, s, t) = \frac{n!}{i!j!k!} r^i s^j t^k$$

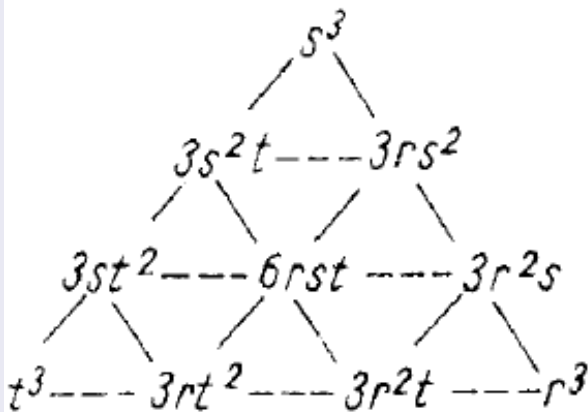
## Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera dla dziedziny trójkątnej



# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera dla dziedziny trójkątnej



# Obiekty graficzne

## Algorytm de Casteljau wyznaczania punktów trójkątnego płata powierzchni Béziera

Oblicz współrzędne barycentryczne  $(r, s, t)$  punktu  $(u, v)$ , rozwiązując układ 3 równań liniowych

$$\begin{cases} rA + sB + tC = [u, v] \\ r + s + t = 1 \end{cases}$$

dla wszystkich  $i, j, k \geq 0$ , takich że  $i + j + k = n$  podstaw

$$P_{i,j,k}^0 = P_{i,j,k}$$

dla  $l = 1, 2, \dots, n$

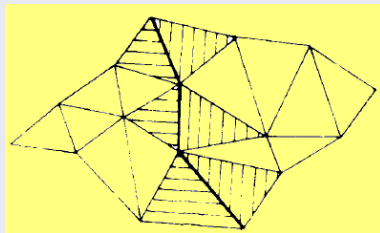
dla wszystkich  $i, j, k \geq 0$  takich, że  $i + j + k = n - 1$ , oblicz

$$P_{i,j,k}^l = r P_{i+1,j,k}^{l-1} + s P_{i,j+1,k}^{l-1} + t P_{i,j,k+1}^{l-1}$$

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Béziera dla dziedziny trójkątnej

Różne trójkątne porcje powierzchni Béziera można łączyć. Dla ciągłości sklejenia wystarcza pokrywanie się odpowiednich brzegowych punktów kontrolnych. Dla regularności klasy  $C^1$  potrzeba, by mające wspólne boki brzegowe pary trójkątów utworzonych przez punkty kontrolne były współpłaszczyznowe (na rys. 7 są one zakreskowane).



Rys. 7: Warunki regularności łączenia trójkątnych porcji powierzchni Béziera

# Spis treści

- 1 **Reprezentacja obiektów graficznych**
  - Reprezentacja powierzchni
  - Powierzchnie Béziera
  - **Powierzchnie B-sklejane**
  - Powierzchnie Coonsa
  - Powierzchnie Gordona



# Obiekty graficzne

## Powierzchnie B-sklejane

Powierzchnie B-sklejane reprezentuje iloczyn

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} M_j^l(v) N_i^k(u)$$

$P_{i,j}$  – dane punkty kontrolne (punkty de Boora),

$M_j^l(v)$ ,  $N_i^k(u)$  – B-sklejane funkcje bazowe stopnia odpowiednio  $l$  i  $k$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases}$$

$$N_i^j(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i} N_i^{j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{j-1}(t), \text{ dla } j > 0$$

# Obiekty graficzne

## Właściwości powierzchni B-sklejanych

- Powierzchnia B-sklejana leży w powłoce wypukłej swoich punktów kontrolnych.
- Linie  $v = \tilde{v}$  są krzywymi B-sklejnymi określonymi przez punkty de Boora równe

$$P_i(\tilde{v}) = \sum_{j=0}^m P_{i,j} M_j^I(\tilde{v})$$

i analogicznie dla linii  $u = \tilde{u}$ . W szczególności brzegi płata powierzchni są krzywymi B-sklejnymi generowanymi przez odpowiednie brzegowe punkty kontrolne płata.

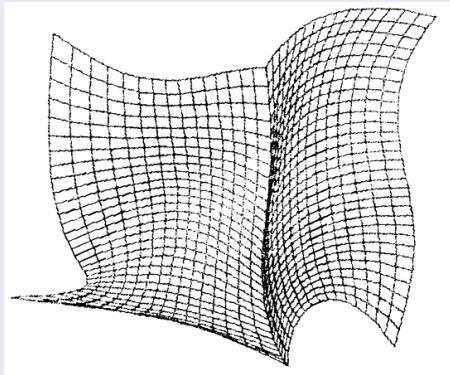
# Obiekty graficzne

## Właściwości powierzchni B-sklejanych

- Wpływ punktów de Boora na kształt powierzchni jest lokalny. Zmiana jednego punktu  $P_{i,j}$  powoduje zmianę fragmentu powierzchni  $S(u, v)$  ograniczonego do prostokąta  $u_i \leq u \leq u_{i+k+1}$ ,  $v_j \leq v \leq v_{j+l+1}$ . Odwrotnie, fragment  $(u, v) \in [u_i, u_{i+1}]$  zależy tylko od punktów kontrolnych  $P_{i-k,j-l}, \dots, P_{i,j}$ .

# Obiekty graficzne

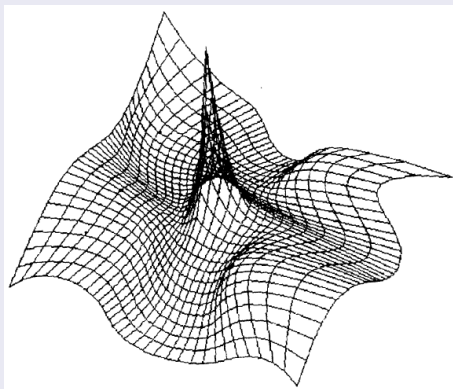
## Właściwości powierzchni B-sklejanych



Rys. 8: Powierzchnia B-sklejana z krotnym węzłem dla jednej zmiennej

# Obiekty graficzne

## Właściwości powierzchni B-sklejanych



Rys. 9: Powierzchnia B-sklejana interpolująca dany punkt dzięki maksymalnemu ukrotnieniu odpowiednich węzłów

# Spis treści

- 1 Reprezentacja obiektów graficznych
  - Reprezentacja powierzchni
  - Powierzchnie Béziera
  - Powierzchnie B-sklejane
  - **Powierzchnie Coonsa**
  - Powierzchnie Gordona

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa

Coons w 1967 r. zaproponował metodę interpolacji powierzchni. Zakłada się, że dane są cztery odpowiednio przecinające się krzywe, definiujące brzeg płata powierzchni.

Niech parametryzacja porcji  $S(u, v)$  będzie znormalizowana do kwadratu jednostkowego

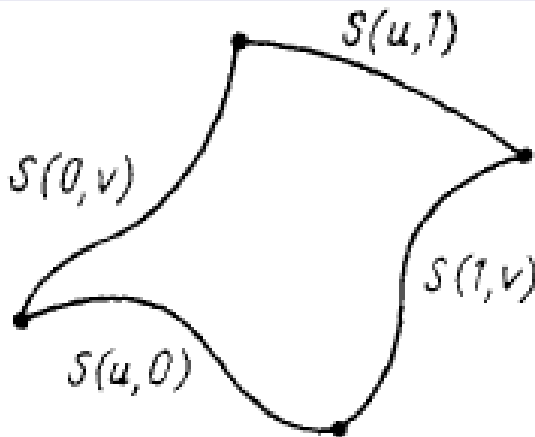
$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

Te krzywe brzegowe można przedstawić jako

$$S(0, v), S(1, v), S(u, 0), S(u, 1)$$

## Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa





# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa

Płat powierzchni Coonsa buduje się interpolując liniowo jej przeciwległe brzegi. Łącząc odcinkami punkty krzywych  $S(0, v)$  i  $S(1, v)$ , dostajemy powierzchnię z rys. 11a

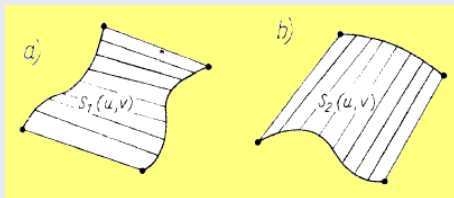
$$S_1(u, v) = (1 - u)S(0, v) + uS(1, v)$$

i analogicznie dla pozostałych dwu brzegów, rys. 11b

$$S_2(u, v) = (1 - v)S(u, 0) + vS(u, 1)$$

## Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa



Rys. 11: Krzywe brzegowe płata

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa

Równanie opisujące tę powierzchnię da się przedstawić równaniem

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^1 \alpha_i(u)S(i, v) + \sum_{j=0}^1 \beta_j(v)S(u, j) - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \alpha_i(u)\beta_j(v)S(i, j)$$

jeśli spełnione są warunki

$$\alpha_0(0) = 1, \alpha_0(1) = 0, \alpha_1(0) = 0, \alpha_1(1) = 1$$

$$\beta_0(0) = 1, \beta_0(1) = 0, \beta_1(0) = 0, \beta_1(1) = 1$$

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Coonsa

Dla ciągłości sklejenia dwóch płatów powierzchni Coonsa wystarczy, by miały wspólny brzeg, czyli by pewna krzywa brzegowa jednego płata była równa krzywej) brzegowej drugiego. Sklejenia odpowiednich krzywych brzegowych będą lepsze, jeśli oprócz żądania ciągłości, zażądamy, by styczne do brzegów miały odpowiednie kierunki.

# Spis treści

- 1 Reprezentacja obiektów graficznych
  - Reprezentacja powierzchni
  - Powierzchnie Béziera
  - Powierzchnie B-sklejane
  - Powierzchnie Coonsa
  - Powierzchnie Gordona

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Gordona

Powierzchnie Gordona są uogólnieniem powierzchni Coonsa. Dane są nie jak poprzednio dwie pary krzywych brzegowych mających wspólne narożne punkty, ale dwie rodziny krzywych

$$S(u_i, v) \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n$$

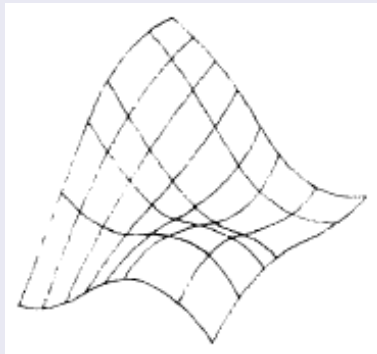
oraz

$$S(u, v_j) \text{ dla } j = 0, 1, \dots, m$$

i przecinających się wzajemnie w  $(n + 1)(m + 1)$  punktach  $S(u_i, v_i)$   
rys. 12. Powierzchnia  $S(u, v)$  ma zawierać wszystkie dane krzywe.  
Można ją konstruować, stosując różne rodzaje interpolacji.

# Obiekty graficzne

## Powierzchnie Gordona



Rys. 12: Dwie rodziny przecinających się krzywych

# Literatura

[1] M. Jankowski, Elementy grafiki komputerowej, WNT, 2006



Koniec? :-)

Koniec wykładu 8