

Grafika komputerowa

Wykład 6

Krzywe, powierzchnie, bryły

Romuald Kotowski

Instytut Informatyki i Automatyki

Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości w Łomży

2 0 0 9

Spis treści

- 1 Obiekty graficzne
- 2 Opis parametryczny obiektów graficznych
- 3 Drzewa a obiekty graficzne

Spis treści

- 1 Obiekty graficzne
- 2 Opis parametryczny obiektów graficznych
- 3 Drzewa a obiekty graficzne

Spis treści

- 1 Obiekty graficzne
- 2 Opis parametryczny obiektów graficznych
- 3 Drzewa a obiekty graficzne

Obiekty graficzne

Obiekt graficzny – wszystko co da się narysować z użyciem komputera:

- krzywa,
- płaska figura,
- powierzchnia,
- trójwymiarowa bryła.

Struktura obiektu nie musi być topologicznie jednorodna. Możemy dowolnie łączyć bryły i krzywe. Liczba danych dających kompletny opis obiektu graficznego zależy nie tylko od jego geometrii (kształtu), lecz również od sposobu wizualizacji.

Opis parametryczny

Krzywe mogą być opisywane analitycznie funkcją jednej zmiennej

$$y = f(x) \text{ dla } x \in [x_1, x_2]$$

Bardziej ogólne jest **przedstawienie parametryczne**:

- dla krzywych płaskich

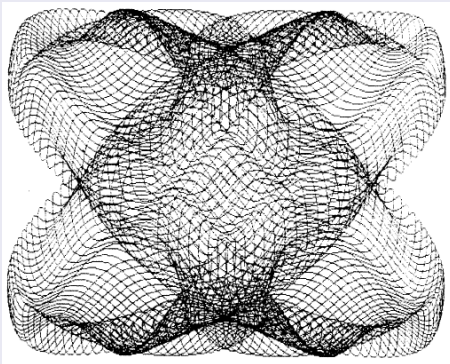
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

- dla krzywych przestrzennych

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Krzywe

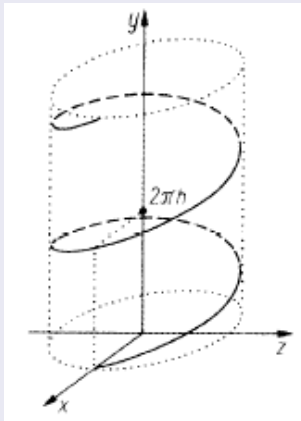
Opis parametryczny



Rys. 1: Wykres krzywej określonej parametrycznie: $x(t) = \sin(0.99t) - 0.7 \cos(3.01t)$,
 $y(t) = \cos(1.01t) + 0.1 \sin(15.03t)$, $t \in [0, 300]$

Krzywe

Opis parametryczny



Rys. 2: Linia śrubowa: $x(t) = r \cos t$, $y(t) = h t$, $z(t) = r \sin t$, $t \in [0, n\pi]$

Powierzchnie

Opis parametryczny

Przedstawienie powierzchni jest uogólnieniem reprezentacji krzywych.

Powierzchnia może być opisana funkcją

$$y = f(x, z)$$

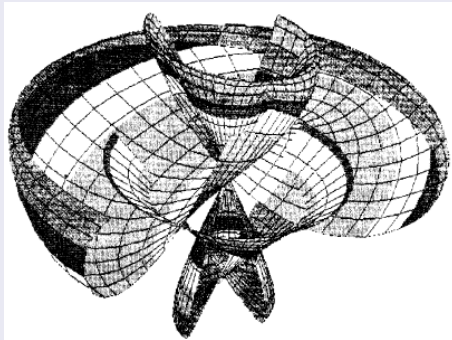
dla punktów (x, z) z ustalonej dziedziny D , albo zadana parametrycznie funkcjami

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

dla $u \in [u_1, u_2]$ i $v \in [v_1, v_2]$

Powierzchnie

Opis parametryczny



Rys. 3: Powierzchnia zadana parametrycznie: $x(u, v) = \cos au$, $y(u, v) = \cos bu \sin u$, $z(u, v) = \cos cu \sin v$

Obszary płaskie

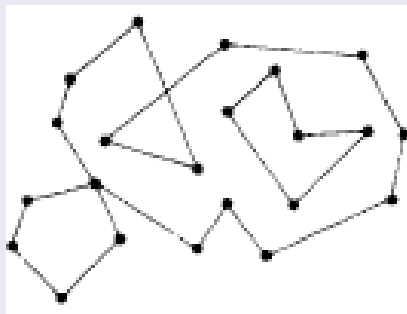
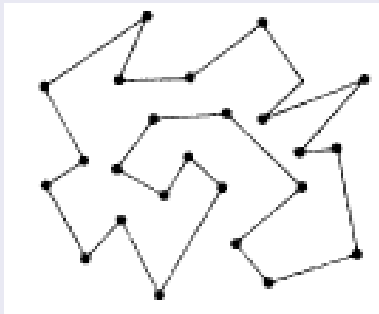
Wielokąty

Opis obszarów (figur) płaskich:

- brzeg obszaru – określamy kawałkami przez różne krzywe,
- wewnątrz obszaru – określamy przez operacje dodawania, odejmowania i przecięcia kilku ustalonych elementarnych 'klocków', np. koła i kwadratu.

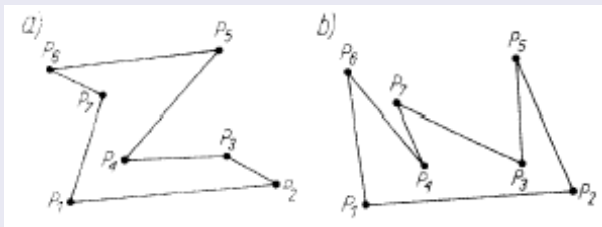
W praktyce grafiki komputerowej najczęściej spotykanymi obszarami są wielokąty i dlatego ich reprezentacji warto poświęcić więcej uwagi.

Wielokąty



Rys. 4: Wielokąt zwykły (a); wielokąt dowolny (b)

Wielokąty



Rys. 5: Zbiór wierzchołków nie określa wielokąta jednoznacznie

Drzewa

Definicja drzewa

Skończone drzewo D z korzeniem to taki niepusty, skończony zbiór etykietowanych węzłów, że istnieje jeden wyróżniony węzeł nazywany korzeniem drzewa, a pozostałe węzły są podzielone na $n \geq 0$ różnych poddrzew $D_1, D_2, \dots, D_n$ z korzeniami. Węzły, z których nie wychodzą żadne poddrzewa, noszą nazwę liści; pozostałe węzły nazywa się węzłami wewnętrznymi.

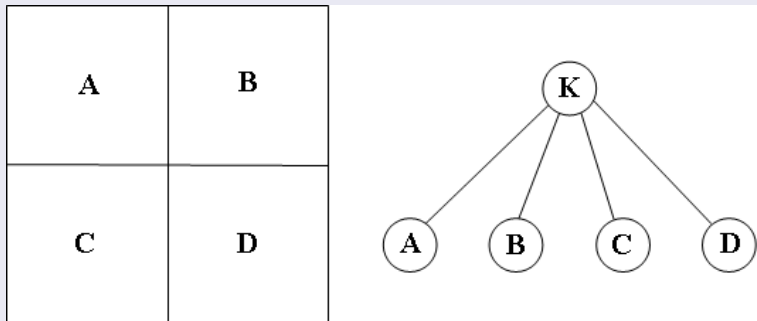
Drzewa

Terminologia

- Korzeń – przodek wszystkich swoich potomków
- Korzeń drzewa – ojciec korzeni swoich poddrzew
- Korzenie poddrzew – synowie korzenia
- Wszystkie węzły w drzewie lub poddrzewie – potomkowie korzenia drzewa lub poddrzewa

Będziemy rozważać drzewa uporządkowane: różne uporządkowania to różne drzewa. Reprezentacja za pomocą drzew może być stosowana zarówno do brzegu, jak i do jego wnętrza.

Drzewa



Rys. 6: Podział kwadratu i odpowiadające mu uporządkowanie liści drzewa

Drzewa

Całemu kwadratowi odpowiada korzeń drzewa czwórkowego opisującego obszar, a potomkowie węzłów są związani z podziałem kwadratu na coraz mniejsze części. Początkowy duży kwadrat dzielimy na cztery mniejsze kwadraty. W drzewie czterech synów korzenia reprezentuje te ćwiartki uporządkowane zgodnie z Rys. 6.

Drzewa

Liśćmi drzewa są węzły odpowiadające jednorodnym fragmentom obszaru. Jeśli cały mniejszy kwadrat reprezentowany węzłem jest zawarty wewnątrz obszaru, to temu węzłowi przypisujemy umownie kolor czarny, i odwrotnie – kolor biały, gdy cały kwadratowy fragment leży na zewnątrz obszaru. Kwadraty leżące częściowo wewnątrz, a częściowo na zewnątrz obszaru są reprezentowane węzłami wewnętrznymi drzewa i przypisujemy im umownie kolor szary. Taki rekurencyjny podział kontynuujemy do momentu, gdy wszyscy potomkowie są jednorodni (każdy z mniejszych kwadratów leży całkowicie wewnątrz lub cały na zewnątrz obszaru), albo gdy rozmiary podzielonych kwadratów są odpowiednio małe, na przykład mniejsze od wielkości piksela na ekranie. Przy takich kryteriach kończenia podziału drzewo czwórkowe reprezentujące obraz dla monitora o rozdzielczości $2^n \times 2^n$ będzie miało nie więcej niż $n + 1$ poziomów.

Drzewa

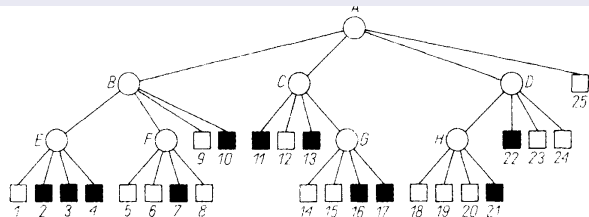
Przykładowy obszar i drzewo czwórkowe (Rys. 7) opisujące jego wnętrze, może być reprezentowane ciągiem

$$((BCCC)(BBCB)BC)(CBC(BBCC))((BBBC)CBB)B$$

nawiasy $()$ – węzły wewnętrzne drzewa; B i C – liście białe i czarne.

Drzewa

1	2	5	6		
3	4	7	8	11	12
9		10	13	14	15
18	19			16	17
20	21	22			
23	24				



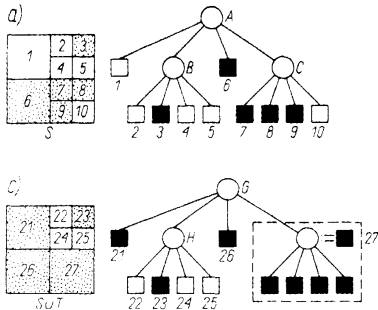
Rys. 7: Obszar i reprezentujące go drzewo czwórkowe

Drzewa

Za pomocą drzew czwórkowych łatwo znajduje się sumę i przecięcie dwóch obszarów. Zbudowanie drzewa opisującego sumę $\mathbf{U} = \mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ obszarów $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T}$ wymaga równoległego przejrzania od korzenia w dół (drzewa rosną do dołu) drzew reprezentujących $\mathbf{S}$ i $\mathbf{T}$ oraz badanie w nich odpowiadających sobie węzłów w kolejnych pokoleniach.

Jeśli jeden z węzłów jest liściem **czarnym**, to w drzewie **U** także umieszczamy liść czarny. Gdy węzeł jednego drzewa, na przykład **S**, jest liściem **białym**, to wynikowym węzłem w tym miejscu **U** będzie węzeł drugiego drzewa, tzn. **T**. Jeśli oba odpowiadające sobie węzły w **S** i **T** są szare, to do **U** wstawiamy również węzeł szary (wewnętrzny) i stosujemy powyższy algorytm rekurencyjnie do potomków w **S** i **T**. W tym postępowaniu należy uwzględnić przypadek, gdy przy sumowaniu synów dwu węzłów szarych otrzymamy cztery liście czarne. Trzeba je wtedy połączyć, zastępując w **U** ich szarego ojca liściem czarnym i sprawdzić, czy taka sama modyfikacja nie powinna dotyczyć wcześniejszych przodków. W przykładzie na rys. 8c ten szczególny przypadek został oznaczony przerywaną ramką.

Drzewa

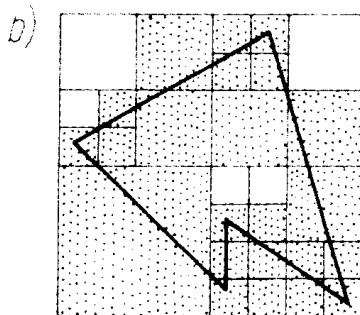
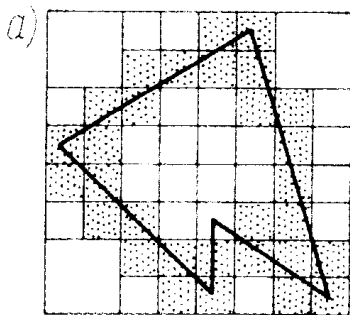


Rys. 8: Obszary i opisujące je drzewa: a) S; b) T; c) $S \cup T$; d) $S \cap T$

Drzewa

Z przykładu 9 wynika, że wzdłuż każdej krawędzi trzeba rekurencyjnie dzielić początkowy kwadrat aż do końca, tzn. na kwadraty minimalnej wielkości. W rezultacie utworzone drzewo jest duże i zapamiętanie go wymaga sporej pamięci. Można uzupełnić klasyfikacji węzłów drzewa o dodatkowy typ liścia – krawędź. Przypisujemy go tym potomkom korzenia, czyli mniejszym kwadratom, przez które przechodzi dokładnie jedna krawędź opisywanego wielokąta – widać, że ta modyfikacja może istotnie uprościć strukturę drzewa.

Drzewa



Rys. 9: Reprezentacja brzegu wielokąta: a) z tradycyjnymi typami liści; b) z dodatkowym typem liścia - krawędź

Bryły

Reprezentacja szkieletowa

Reprezentacja szkieletowa dotyczy brzegu bryły i ma hierarchiczną strukturę. Powierzchnię bryły opisujemy sumą płaskich wielokątnych ścian. Zakładamy, że ściany przecinają się jedynie we wspólnych krawędziach lub wierzchołkach. Każda ściana jest określona zbiorem swoich krawędzi (boków swego wielokąta), a te są zdefiniowane parami wierzchołków. Klasyczna metoda pamiętania takich danych polega na utworzeniu kilku list.

Tablica wierzchołków **TW** zawiera współrzędne x, y, z tych punktów. W tablicy krawędzi **TK** zapisuje się parami numery wierzchołków – końców krawędzi, a wreszcie tworzy się listę ścian. Jej elementami są listy (skończone ciągi) numerów krawędzi stanowiących boki wielokątnych ścian. Lista ścian może być zapamiętana w tablicy liniowej **LS**. Jej n_1 początkowych elementów to n_1 numerów krawędzi pierwszej ściany, dalej n_2 numerów krawędzi drugiej ściany itd. Dodatkowo, w tablicy **LK** przechowuje się wtedy informacje o liczbie $n_1, b_2, \dots, n_s$ krawędzi kolejnych ścian. Oczywiście trzeba także pamiętać liczbę w wierzchołków, liczbę k krawędzi i liczbę s ścian.

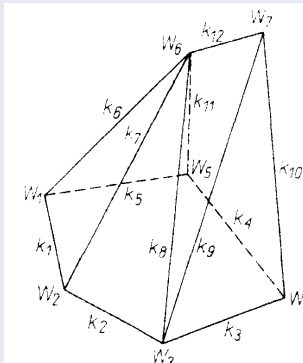
Bryły

Reprezentacja szkieletowa

- Tablica **TW** wierzchołków W_i :
 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_7, y_7, z_7)$
- Tablica **TK** krawędzi k_i : $(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1), (1,6), (2,6), (3,6), (3,7), (4,7), (5,6), (6,7)$
- Lista **LS** ścian s_i : $(1,7,6), (2,8,7), (9,12,8), (3,10,9), (4,11,12,10), (5,6,11), (5,4,3,2,1)$
- Tablica liczby krawędzi ścian **LK**: 3, 3, 3, 3, 4, 3, 5

Bryły

Reprezentacja szkieletowa



Rys. 10: Reprezentacja szkieletowa bryły

Bryły

Twierdzenie Eulera

W każdym zwykłym wielościanie

$$w - k + s = 2$$

w – liczba wierzchołków; k – liczba krawędzi; s – liczba ścian

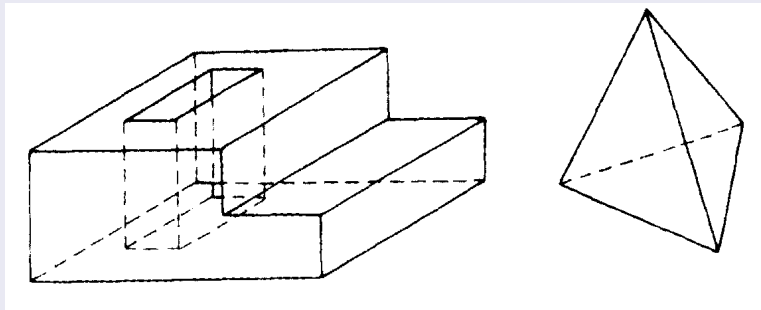
Uogólnione twierdzenie Eulera:

$$w - k + s = 2(c - t) + d$$

c – liczba rozłącznych brył; t – liczba otworów(tuneli); d – liczba wielokątnych dziur we wszystkich ścianach

Bryły

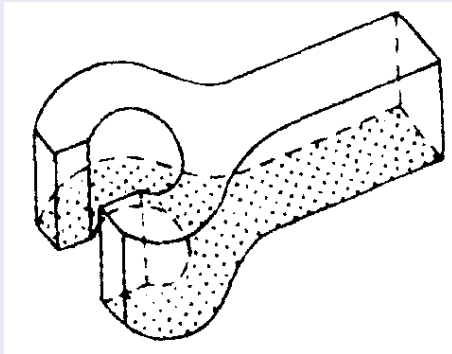
Uogólnione twierdzenie Eulera



Rys. 11: Ilustracja uogólnionego twierdzenia Eulera: $c = 2$, $t = 1$, $d = 2$, $s = 16$, $k = 36$, $w = 24$

Bryły

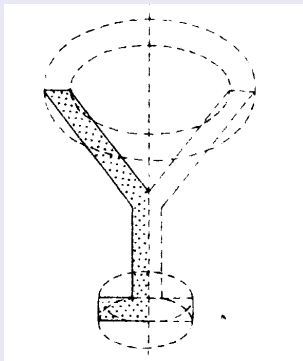
Zakreślanie przestrzeni – budowanie bryły przez przemieszczenie jej przekroju (płaskiej figury) wzdłuż pewnej trajektorii w przestrzeni



Rys. 12: Tworzenie bryły przez przesunięcie równoległe płaskiego przekroju

Bryły

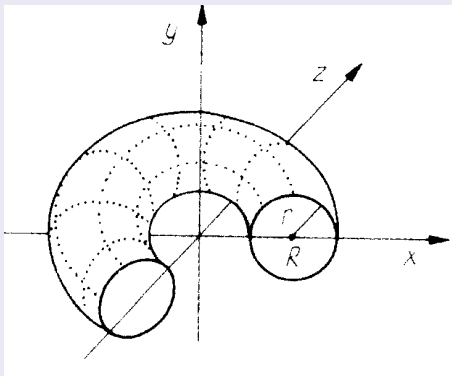
Zakreślanie przestrzeni



Rys. 13: Bryła obrotowa

Bryły

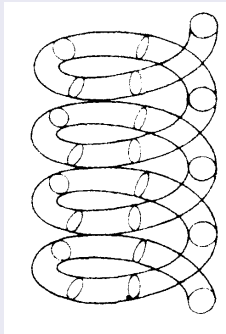
Zakreślanie przestrzeni



Rys. 14: Tworzenie torusa przez obrót okręgu

Bryły

Zakreślanie przestrzeni



Rys. 15: Zakreślanie przestrzeni kołem prostopadłym do linii śrubowej

Bryły

Konstruktywna geometria brył

Konstruktywna geometria brył (ang. *constructive solid geometry*) oznacza metodę budowania brył w wyniku składania ustalonych elementarnych 'klocków'. Operacje składania to:

- dodawanie,
- odejmowanie,
- iloczyn (część wspólna) zbiorów.

Bryły

Konstruktywna geometria brył

Klockiem może być dowolna półprzestrzeń, czyli zbiór punktów (x, y, z) spełniających nierówność

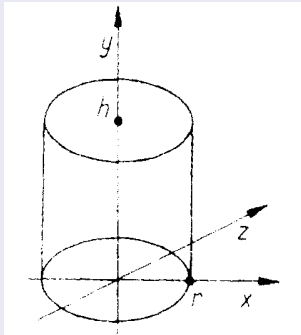
$$f(x, y, z) < 0$$

gdzie f – dowolny ciągły funkcjonal. Brzeg klocka tworzą punkty, dla których $f(x, y, z) = 0$, a dopełnienie (zewnętrznie) punkty spełniające nierówność

$$f(x, y, z) > 0$$

Bryły

Konstruktywna geometria brył



Rys. 16: Walec jako część wspólna trzech półprzestrzeni

Bryły

Konstruktywna geometria brył

Walec to część wspólna trzech półprzestrzeni zdefiniowanych nierównościami

$$x^2 + y^2 - r^2 < 0$$

$$-y < 0$$

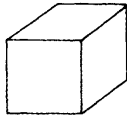
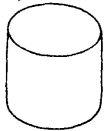
$$y - h < 0$$

W praktyce wygodniej jest budować bryłę nie z nieskończonych półprzestrzeni, lecz z ograniczonych elementów.

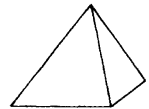
Bryły

Konstruktywna geometria brył

a)



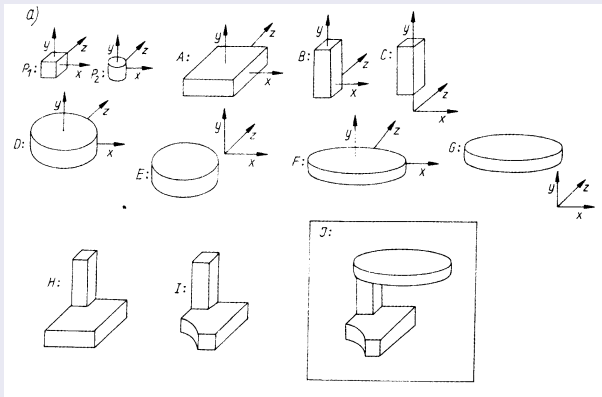
b)



Rys. 17: Typowe zestawy 'klocków'

Bryły

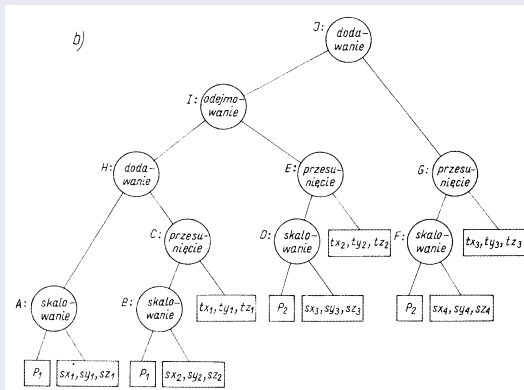
Konstruktywna geometria brył



Rys. 18: a) Budowanie bryły z elementów podstawowych;

Bryły

Konstruktywna geometria brył



Rys. 19: b) Drzewo opisujące konstrukcję

Bryły

Reprezentacja za pomocą drzew ósemkowych

Metoda opisu płaskich obszarów drzewami czwórkowymi można łatwo uogólnić na przypadek trójwymiarowy. Ograniczmy się do reprezentacji objętościowej wnętrza.

Obiekt przestrzenny (bryłę) wpisujemy w sześcián, któremu odpowiada korzeń drzewa ósemkowego. Ten wyjściowy sześcián dzielimy na osiem mniejszych, numerowanych jak na Rys. 20.

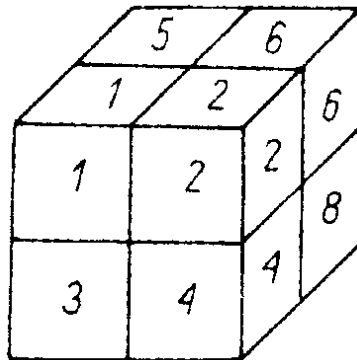
Bryły

Reprezentacja za pomocą drzew ósemkowych

Jeśli mniejszy sześcian leży całkowicie wewnątrz bryły, to reprezentującemu go synowi korzenia przypisujemy kolor czarny. I odwrotnie, gdy cały sześcian jest położony na zewnątrz bryły, to odpowiadającemu mu synowi w drzewie przyporządkowujemy kolor biały. Sześciąnom niejednorodnym, tylko częściowo zawartym w bryle, odpowiadają synowie koloru szarego i te sześciany dzielimy dalej na mniejsze, aż do uzyskania wszystkich potomków jednorodnych lub mniejszych od ustalonej minimalnej wielkości. Na rysunkach 20 a i b przedstawiono przykładową bryłę i reprezentujące ją drzewo ósemkowe.

Bryły

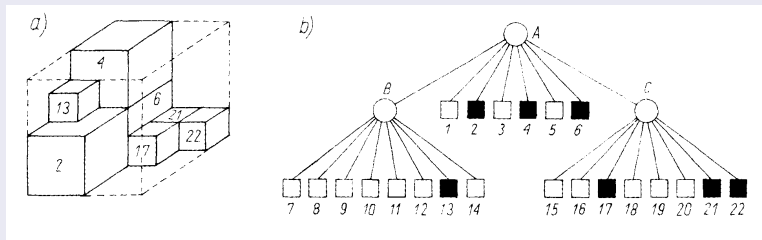
Reprezentacja za pomocą drzew ósemkowych



Rys. 20: Podział sześciangu

Bryły

Reprezentacja za pomocą drzew ósemkowych



Rys. 21: Bryła a) i opisujące ją drzewo ósemkowe b)

Literatura

[1] M. Jankowski, Elementy grafiki komputerowej, WNT, 2006

Koniec? :-)

Koniec wykładu 6