

Grafika komputerowa
Wykład 4
Geometria przestrzenna

Romuald Kotowski

Instytut Informatyki i Automatyki

Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości w Łomży

2009

Spis treści

- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Spis treści

- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Spis treści

- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Spis treści

- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Spis treści

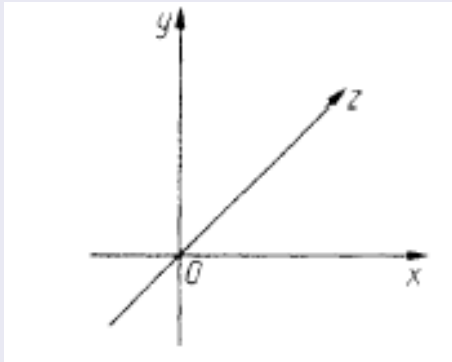
- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Spis treści

- 1 Geometria 3D - podstawowe pojęcia
- 2 Obliczenia numeryczne
- 3 Przekształcenia punktów 3D
- 4 Rzutowanie
- 5 Rzutowanie w układzie obserwatora
- 6 Definiowanie ostrosłupa widzenia

Geometria w przestrzeni 3D

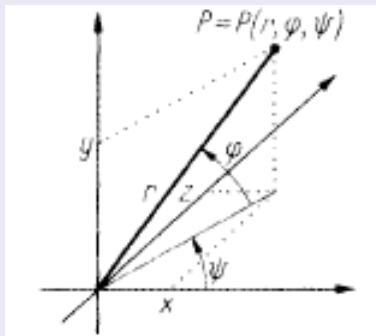
Podstawowe pojęcia



Rys. 1: Lewoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia



Rys. 2: Współrzędne sferyczne: $|OP| = r$, $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi$,
 $z = r \cos \varphi \sin \psi$

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

Długość wektora \vec{v} : $|\vec{v}| = v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Iloczyn skalarny

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

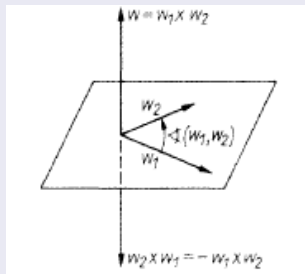
Iloczyn wektorowy: właściwości

1. Prostopadłość: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}$ i $\vec{v}_2 \perp \vec{v}$
2. Dodatnie zorientowanie wektorów \vec{v}_1 , \vec{v}_2 i \vec{v}

$$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{bmatrix} > 0$$

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia



Rys. 3: Iloczyn wektorowy

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

3. Definicja iloczynu wektorowego

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \sin \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = [y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1]$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$
i $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$(y - y_1)(z_2 - z_1) = (z - z_1)(y_2 - y_1)$$

$$(z - z_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(z_2 - z_1)$$

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

Parametryczne równanie prostej

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

$$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

czyli

$$P(t) = P_1 + t\vec{k}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

gdzie $\vec{k} = P_2 - P_1 = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ – wektor kierunkowy prostej. Jeśli $t \in (-1, +1)$ to odcinek P_1P_2 .

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

Równanie płaszczyzny

$\vec{n} = [x_n, y_n, z_n]$ – wektor normalny do płaszczyzny; $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
– punkt płaszczyzny

$$\vec{n} \circ (P - P_0) = 0 \iff x_n x + y_n y + z_n z = c$$

gdzie $c = \vec{n} \circ P_0 = x_n x_0 + y_n y_0 + z_n z_0$

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty

$$((P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)) \circ (P - P_1) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

Równanie prostej – wynik przecięcia dwu płaszczyzn

$$P(t) = P_0 + t \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Punkt P_0 wyznaczamy jak przecięcie z trzecią dowolną płaszczyzną nierównoległą do pozostałych dwu, np. przechodzącą przez początek układu współrzędnych

$$(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \circ P = 0$$

W ogólności, jeśli trzy płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, to spełnia ten punkt 3 równania

$$\vec{n}_1 \circ P = c_1, \quad \vec{n}_2 \circ P = c_2, \quad \vec{n}_3 \circ P = c_3$$

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia

Jeśli $\vec{n}_i = [n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}]$, $i = 1, 2, 3$, to zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$n_{11}x + n_{12}y + n_{13}z = c_1$$

$$n_{21}x + n_{22}y + n_{23}z = c_2$$

$$n_{31}x + n_{32}y + n_{33}z = c_1$$

Obliczenia numeryczne

Reprezentacja liczb

Liczby typu **integer** – reprezentacja stałopozycyjna

$$I = s \sum_{i=0}^n c_i 2^i, \quad (c_n \neq 0 \text{ dla } I \neq 0)$$

gdzie $s = \pm 1$ – znak liczby; $c_i = 0$ lub 1 .

Liczby typu **real** – reprezentacja zmiennopozycyjna

$$x = s 2^c m$$

gdzie $s = \pm 1$ – znak liczby; c – cecha (liczba całkowita); $m = \sum_{i=1}^{\infty} c_{-i} 2^{-i}$, ($c_{-1} = 1$,
 $c_{-i} = 0$ lub 1 dla $i > 1$) – mantysa (liczba rzeczywista z przedziału $[1/2, 1)$)

Obliczenia numeryczne

Reprezentacja liczb

Przykład

Chcemy numerycznie wyznaczyć punkt przecięcia prostych

$$y = a_1x + b_1 \text{ i } y = a_2x + b_2$$

Niech $rd(x) = x(1 + \varepsilon)$, $|\varepsilon| \leq \eta$, η – dokładność arytmetyki. Niech $a_1 = rd(a_1)$ i $a_2 = rd(a_2)$, a b_1, b_2 – znane tylko z przybliżeniem, czyli rozwiązujemy układ

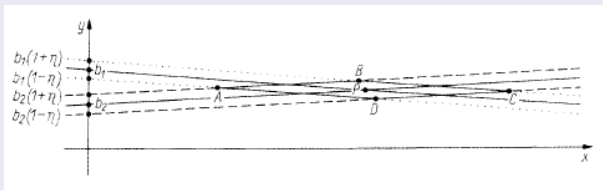
$$y = a_1x + \bar{b}_1 \text{ i } y = a_2x + \bar{b}_2$$

$\bar{b}_1 = rd(b_1) = b_1(1 + \varepsilon_1)$, $\bar{b}_2 = rd(b_2) = b_2(1 + \varepsilon_2)$, $|\varepsilon_i| \leq \eta$

czyli prosta $y = a_1x + \bar{b}_1$ będzie reprezentowana jakąś prostą z pęku między $b_1(1 - \eta)$ a $b_1(1 + \eta)$, a prosta $y = a_2x + \bar{b}_2$ z prostą z pęku pomiędzy $b_2(1 - \eta)$ a $b_2(1 + \eta)$.

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia



Rys. 4: Wpływ błędów reprezentacji współczynników prostych na położenie punktu ich przecięcia

Obliczenia numeryczne

Reprezentacja liczb

Przykład

Rysujemy wielokrotnie ten sam m-kąt dwoma algorytmami różniącymi się tylko sposobem obliczania kolejnych kątów φ

Algorytm a

podstaw $\Delta\varphi = 2 \cdot 3.14159265/m$;

przesuń pióro do punktu $(1, 0)$;

dla $i = 1, 2, \dots, n$

oblicz $\varphi = i \cdot \Delta\varphi$;

rysuj odcinek od poprzedniego położenia pióra do punktu $(\cos \varphi, \sin \varphi)$;

Algorytm b

podstaw $\Delta\varphi = 2 \cdot 3.14159265/m$;

przesuń pióro do punktu $(1, 0)$;

zainicjuj $\varphi = 0$;

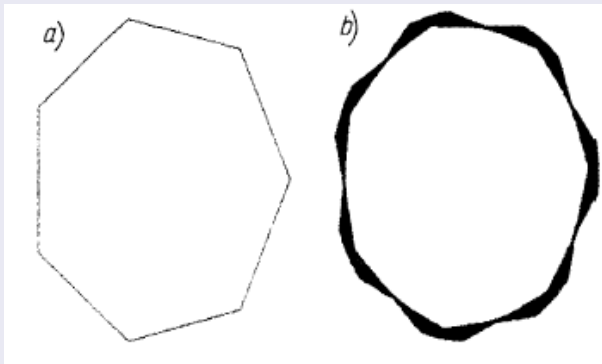
dla $i = 1, 2, \dots, n$

powiększ $\varphi = \varphi + \Delta\varphi$;

rysuj odcinek od poprzedniego położenia pióra do punktu $(\cos \varphi, \sin \varphi)$;

Geometria w przestrzeni 3D

Podstawowe pojęcia



Rys. 5: Siedmiokąt rysowany wielokrotnie algorytmem a) i b) dla $m = 7$ i $n = 7000$

Przekształcenia punktów 3D

Translacja

$$P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z') = P(x, y, z) + t(x, y, z)$$

lub

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia punktów 3D

Skalowanie

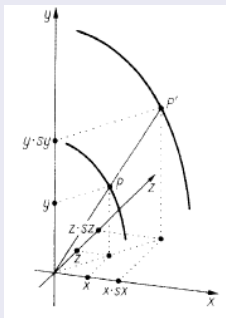
$$P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z') = P(s_x x, s_y y, s_z z)$$

lub

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia punktów 3D

Skalowanie



Rys. 6: Skalowanie krzywej

Przekształcenia punktów 3D

Obrót wokół osi Ox

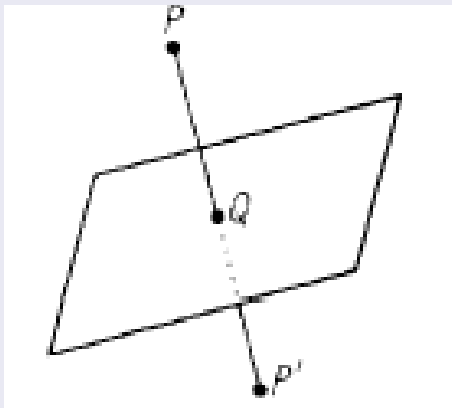
$$P(x, y, z) \rightarrow P'(x', y', z') = P(x, y \cos \varphi - z \sin \varphi, y \sin \varphi + z \cos \varphi)$$

lub

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia punktów 3D

Symetria względem płaszczyzny



Przekształcenia punktów 3D

Symetria względem płaszczyzny

Dla danego punktu $P = (x, y, z)$ szukamy punktu $P' = (x', y', z')$ symetrycznego względem płaszczyzny $ax + by + cz = d$

Rzut punktu P na płaszczyznę $P(x, y, z) \rightarrow Q = P + t[a, b, c]$, bo $[a, b, c]$ prostopadły do płaszczyzny. Parametr t wyznaczmy z warunku

$$a(x + ta) + b(y + tb) + c(z + tc) = d$$

skąd dostajemy $t = \frac{d - ax - by - cz}{a^2 + b^2 + c^2}$. Z oczywistej zależności $P' = P + (2Q - P)$

$$[x', y', z'] = [x, y, z] + 2 \frac{d - ax - by - cz}{a^2 + b^2 + c^2} [a, b, c]$$

Odległość punktu P od płaszczyzny $\rho = \frac{|d - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Przekształcenia punktów 3D

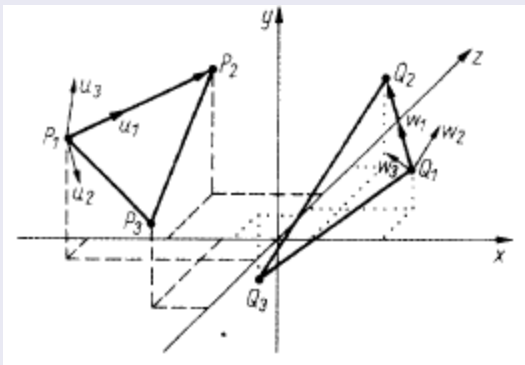
Przekształcenie trzypunktowe

Zastosowanie szczególnie przydatne przy budowaniu scen trójwymiarowych, gdy jeden obiekt chcemy 'dokleić' do drugiego. Dane są dwie trójki punktów P_1, P_2, P_3 i Q_1, Q_2, Q_3 . Szukamy takiej izometrii (odwzorowanie, które nie zmienia odległości między punktami), która

- odwzorowuje punkt P_1 w Q_1
- kierunek $\vec{P} = P_2 - P_1$ przekształca w kierunek $\vec{Q} = Q_2 - Q_1$
- transformuje płaszczyznę przechodzącą przez P_1, P_2, P_3 na płaszczyznę wyznaczoną punktami Q_1, Q_2, Q_3 .

Przekształcenia punktów 3D

Przekształcenie trzypunktowe



Rys. 8: Przekształcenie trzypunktowe

Przekształcenia punktów 3D

Przekształcenie trzypunktowe

Budujemy lokalny układ współrzędnych w P_1

$$\vec{u}_1 = \frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}, \quad \vec{u}_2 = \frac{(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)}{|(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)|}, \quad \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$$

i lokalny układ współrzędnych w Q_1

$$\vec{w}_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{|Q_2 - Q_1|}, \quad \vec{w}_2 = \frac{(Q_2 - Q_1) \times (Q_3 - Q_1)}{|(Q_2 - Q_1) \times (Q_3 - Q_1)|}, \quad \vec{w}_3 = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$$

$$\text{Transformujemy } U = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{bmatrix} \rightarrow W = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{bmatrix} R$$

gdzie R – macierz obrotu

Przekształcenia punktów 3D

Przekształcenie trzypunktowe

Wierszami macierzy U są wektory jednostkowe wzajemnie prostopadłe, a zatem U jest macierzą ortogonalną, $U U^T = I$ czyli $U^{-1} = U^T$ (i podobnie dla W). Mamy zatem

$$R = U^{-1} W = [u_1^T | u_2^T | u_3^T] \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{bmatrix}$$

Musimy jeszcze tylko dokonać translacji o wektor $Q_1 - P_1 R$

Przekształcenia punktów 3D

Przekształcenia układu współrzędnych

Często wygodniej zamiast przekształcać rysowany obiekt jest zmieniać układ współrzędnych. Układ współrzędnych możemy przesuwać, skalować lub obracać.

Warto może jeszcze wspomnieć o szczególnym przypadku skalowania. Przekształcenie określone macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zmienia układ lewoskrętny na układ prawoskrętny.

Rzutowanie

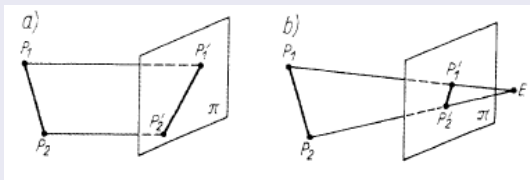
Rzutowanie równoległe i perspektywiczne

Metody rzutowania dzielimy na dwie klasy:

- 1 rzutowanie równoległe – zachowuje równoległość prostych, stosunek długości odcinków równoległych i związki miarowe figury płaskiej równoległej do płaszczyzny rzutowania; stosuje się głównie w rysunku technicznym
- 2 rzutowanie perspektywiczne (środkowe) – pozwala na bardziej realistyczną wizualizację obiektów trójwymiarowych i daje wrażenie głębi

Rzutowanie

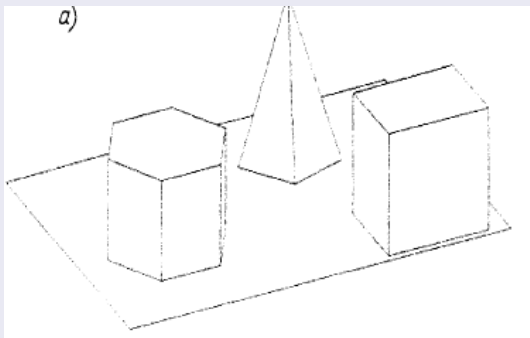
Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 9: Rzuty: a) równoległy; b) środkowy (perspektywiczny)

Rzutowanie

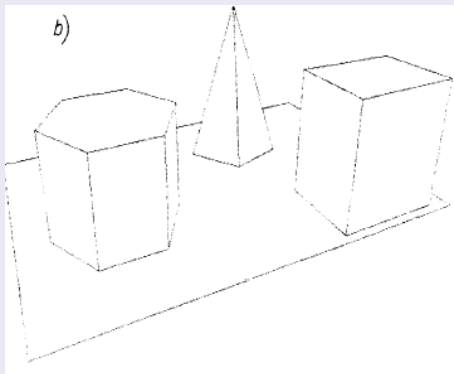
Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 10: Porównanie rzutów tego samego obiektu: a) równoległego;

Rzutowanie

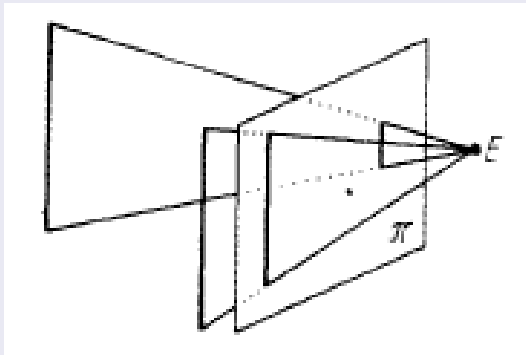
Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 11: Porównanie rzutów tego samego obiektu: b) środkowego

Rzutowanie

Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 12: Relacje odległości w rzucie środkowym

Rzutowanie

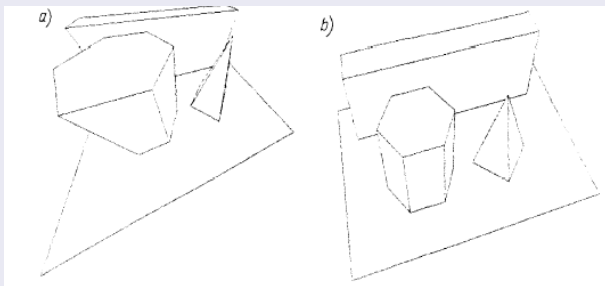
Rzutowanie równoległe i perspektywiczne

Przy rzutowaniu środkowym zostają zmienione relacje odległości: rzuty odcinków leżących bliżej rzutni są dłuższe niż rzuty odcinków tej samej długości, ale bardziej oddalonych od płaszczyzny rzutowania.

Przy rzutowaniu na płaszczyznę π obrazem punktu P jest punkt P' , przecięcia z π prostej przechodzącej przez P . W rzucie perspektywicznym wszystkie proste (promienie rzutowania) mają punkt wspólny, nazywany środkiem rzutowania (punkt E na rys. 12). Odległość tego punktu od rzutni π decyduje o deformacji rysunku (patrz rys. 13). W rzucie równoległym wszystkie proste rzutowania mają ten sam ustalony kierunek \vec{k} . Jeśli jest on prostopadły do rzutni, to rzut nazywamy ortogonalnym.

Rzutowanie

Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 13: Wpływ położenia środka rzutowania w stosunku do płaszczyzny rzutu: a) bliżej; b) dalej

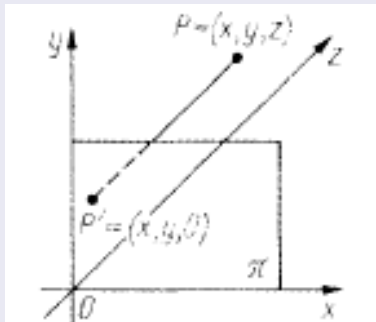
Rzutowanie

Rzutowanie równoległe i perspektywiczne

Znalezienie współrzędnych rzutu P' punktu P sprowadza się do rozwiązania rozważanego wcześniej zadania wyznaczania przecięcia płaszczyzny π i prostej (promienia rzutowania) określonej punktem P i kierunkiem \vec{k} przy rzucie równoległym lub punktem P i środkiem rzutowania E w przypadku rzutu perspektywicznego. W ten sposób otrzymalibyśmy jednak współrzędne punktu P w układzie trójwymiarowym, w którym został opisany rysowany obiekt. Ten wyjściowy układ współrzędnych będziemy nazywali *układem danych*. Do rysowania są potrzebne współrzędne w układzie dwuwymiarowym określonym na płaszczyźnie rzutowania π . Najbardziej popularna jest metoda przekształcenia układu danych do *układu obserwatora*. Rzutnia π pokrywa się z płaszczyzną $z = 0$, a zatem przy rysowaniu na płaskim ekranie wystarczy pominąć współrzędne z .

Rzutowanie

Rzutowanie równoległe i perspektywiczne



Rys. 14: Rzutowanie równoległe w układzie obserwatora

Rzutowanie w układzie obserwatora

Rzut równoległy

Przy rzucie równoległym ortogonalnym rzutem punktu $P = (x, y, z)$ jest $P' = (x, y, 0)$. Ogólniejszą sytuację ilustruje rys. 15. Kierunek rzutu równoległego tworzy z rzutnią π kąt α . Współrzędne x i y rzutu P' punktu $P(x, y, z)$ są równe

$$x' = x + r \cos \varphi, \quad y' = y + r \sin \varphi$$

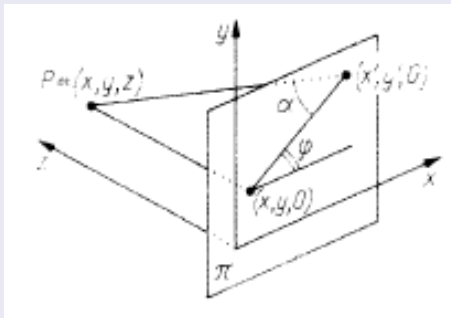
przy czym $r = z \operatorname{tg} \alpha$, a φ jest kątem nachylenia prostej przechodzącej przez $(x, y, 0)$ i $(x', y', 0)$ do osi Ox , więc

$$x' = x + z \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi, \quad y' = y + z \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi$$

Najczęściej przyjmuje się $\varphi = 30^\circ$ lub $\varphi = 45^\circ$, a odpowiadające im sposoby rzutowania mają własne nazwy. Przykładowo, dla kąta $\alpha \operatorname{arc} \operatorname{ctan} 1/2 \approx 63^\circ$ mamy *aksonometrię kawalerską* (rys. 16a), a dla kąta $\alpha = 45^\circ$ *wojskową* (rys. 16b).

Rzutowanie w układzie obserwatora

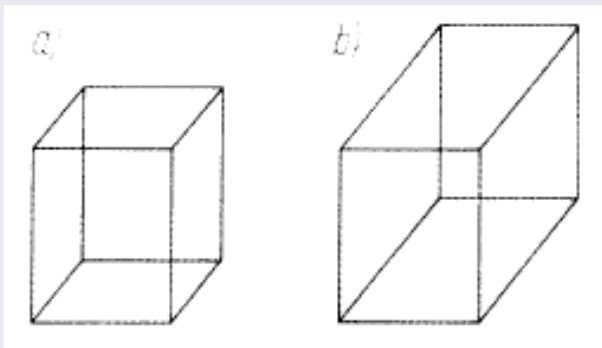
Rzut równoległy



Rys. 15: Ogólny (nieortogonalny) rzut równoległy

Rzutowanie w układzie obserwatora

Rzut równoległy



Rys. 16: Aksonometrie: a) kawalerska; b) wojskowa

Rzutowanie w układzie obserwatora

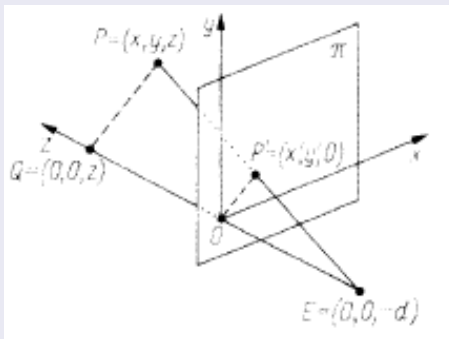
Rzut środkowy

Obserwator utożsamiany ze środkiem rzutowania E znajduje się na ujemnej części osi z układu, na przykład w punkcie $(0, 0, -d)$. Z rysunku 17 widzimy, że skala podobieństwa trójkątów EPQ i $EP'O$ jest równa $d/(z + d)$. Stąd dostajemy potrzebne zależności między współrzędnymi punktu P i jego rzutu perspektywicznego P'

$$x' = \frac{xd}{z + d}, \quad y' = \frac{yd}{z + d}$$

Rzutowanie w układzie obserwatora

Rzut środkowy

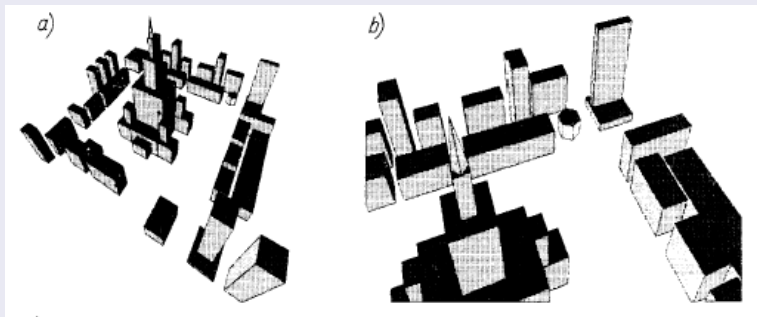


Rys. 17: Rzut środkowy w układzie obserwatora

Definiowanie ostrośłupa widzenia

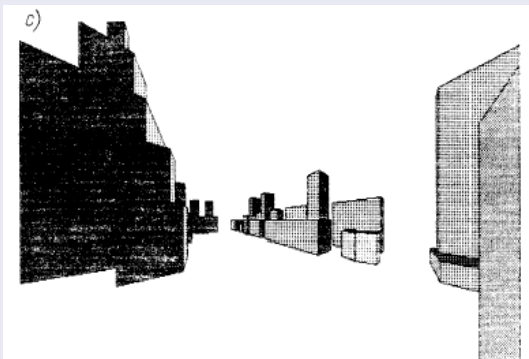
Zakładaliśmy, omawiając rzutowanie perspektywiczne, że wszystkie obiekty trójwymiarowe tworzące scenę znajdują się w pewnej odległości przed obserwatorem (środkiem rzutowania). Możemy zatem, otrzymywać takie obrazki jak na rys. 18a. A jak postępować, gdy chcemy uzyskać zbliżenie jakiegoś elementu (rys. 18b), czy 'sfotografować' fragment sceny trójwymiarowej z jej środka (rys. 19c)? Rozwiązanie polega na zdefiniowaniu ostrośłupa widzenia i rzutowaniu tylko tych obiektów (ew. ich fragmentów), które się w tym ostrośłupie zmieściły.

Definiowanie ostrosłupa widzenia



Rys. 18: a) Widok całego obiektu; b) fragment oglądany z lotu ptaka

Definiowanie ostrośpa widzenia



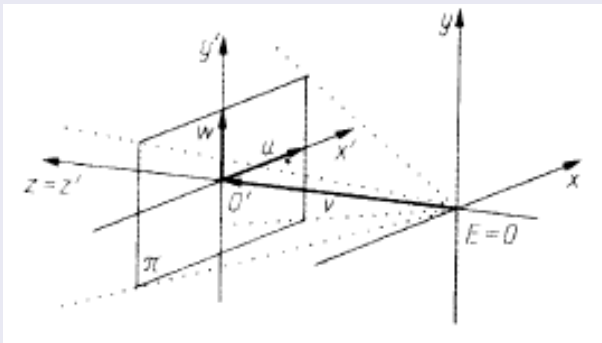
Rys. 19: c) fragment widziany z ulicy

Definiowanie ostrosłupa widzenia

Zróbmy zdjęcie fotograficzne (aparat zgodnie z kierunkiem i zwrotem osi z). Wtedy płaszczyznę rzutowania π jest błona fotograficzna umieszczona w odległości 1 od obserwatora, a klatka filmu ma rozmiar $2u \times 2w$. Rzutnia π jest zatem rozpięta na wektorach $\vec{u} = [u, 0, 0]$ i $\vec{w} = [0, w, 0]$. W ten sposób zdefiniowaliśmy nieskończony ostrosłup widzenia o wierzchołku w środku rzutowania E i krawędziach będących półprostymi wychodzącymi z punktu E , mającymi kierunki (rys. 20)

$$\vec{v} + \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{v} + \vec{u} - \vec{w}, \quad \vec{v} - \vec{u} + \vec{w}, \quad \vec{v} - \vec{u} - \vec{w}$$

Definiowanie ostrośpa widzenia



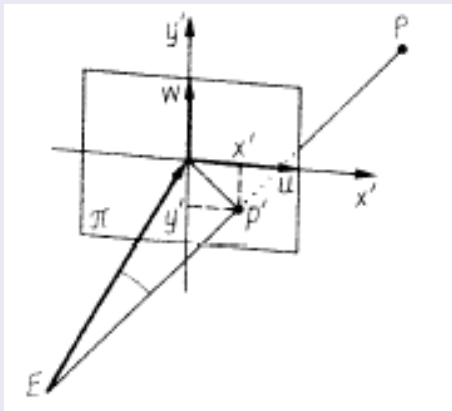
Rys. 20: Początkowe położenie ostrośpa widzenia

Definiowanie ostrośłupa widzenia

Wybór wielkości u i w odpowiada wyborowi obiektywu. Im mniejsze są u i w , tym węższy jest ostrośłup widzenia – w terminologii fotograficznej odpowiadałoby to stosowaniu teleobiektywu o coraz większej ogniskowej. Przyjęcie większych wartości u i w odpowiada natomiast użyciu obiektywu szerokokątnego.

W ogólnym przypadku wierzchołek E ostrośłupa widzenia może być jakimkolwiek punktem \mathbb{R}^3 , na przykład mieć współrzędne (x_E, y_E, z_E) . O wektorach \vec{u} , \vec{w} i \vec{v} zakładamy jedynie, że są ortogonalne (wzajemnie prostopadłe), \vec{v} ma długość $|\vec{v}| = 1$. Przyjmijmy ponadto, że kierunek i zwrot osi x' na rzutni π jest wyznaczony wektorem \vec{u} a na osi y wektorem \vec{w} (rys. 21). Początek tego układu to punkt $O' = E + \vec{v}$. Analogia z fotografowaniem nie jest pełna, gdyż punkty należące do ostrośłupa widzenia, a leżące po tej samej stronie π co punkt E , też będą rzutowane.

Definiowanie ostrośpą widzenia



Rys. 21: Ogólne określenie ostrośpą widzenia

Definiowanie ostrosłupa widzenia

Niech P będzie dowolnym punktem \mathbb{R}^3 o współrzędnych (x, y, z) w układzie danych. Szukamy współrzędnych jego rzutu środkowego P' na rzutni π . Jednocześnie chcemy rozstrzygnąć, czy P leży wewnątrz ostrosłupa widzenia. Z rysunku 21 widać, że

$$EP' = \frac{EP}{|EP \cos \alpha|} = \frac{EP}{\left(|EP| \frac{EP \circ \vec{v}}{|EP| |\vec{v}|} \right)} = \frac{EP}{EP \circ \vec{v}}$$

bo $|\vec{v}| = 1$. Z drugiej strony $EP' = \vec{v} + 0'P'$, a wektor $0'P'$ to

$$0'P' = x' \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + y' \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$$

Definiowanie ostrosłupa widzenia

Szukane współrzędne x' i y' wyznaczamy z równania

$$x' \vec{u}' + y' \vec{w}' + \vec{v} = EP'$$

gdzie $\vec{u}' = \vec{u}/|\vec{u}|$, a $\vec{w}' = \vec{w}/|\vec{w}|$.

$$x' = \frac{EP \circ \vec{u}'}{EP \circ \vec{v}}, \quad y' = \frac{EP \circ \vec{w}'}{EP \circ \vec{v}}$$