Grafika komputerowa
Wykład 3

Geometria płaszczyzny

Romuald Kotowski

Instytut Informatyki i Automatyki

Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości w Łomży

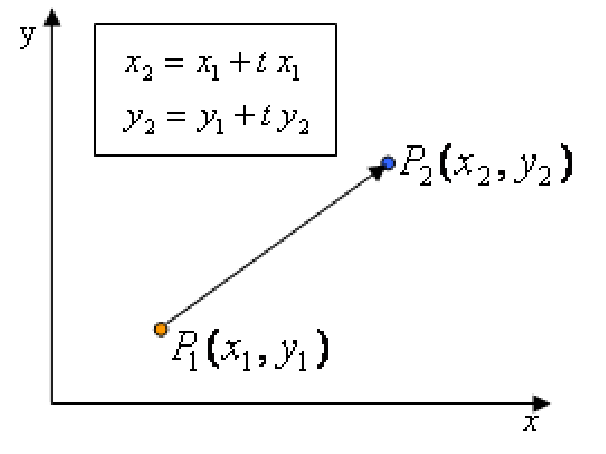
2 0 0 9

Spis treści

Spis treści

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Translacja



Rys. 1: Translacja punktu na płaszczyźnie

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Obrót

Niech współrzędne kartezjańskie punktu P_1 w biegunowym układzie współrzędnych (r, ψ) wynoszą

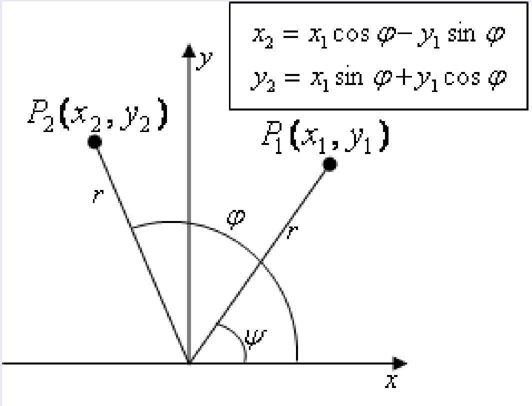
$$x_1 = r\ \cos\psi; \qquad y_1 = r\ \sin\psi$$

Obrazem tego punktu po obrocie o kąt φ wokół początku układu współrzędnych jest punt P_2 o współrzędnych biegunowych $(r, \psi + \varphi)$, czyli $(\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$$x_2 = r\ \cos(\psi + \varphi) = r\ \cos\psi\cos\varphi - r\ sin\psi\sin\varphi$$
$$y_2 = r\ \sin(\psi + \varphi) = r\ \cos\psi\sin\varphi + r\ \sin\psi\cos\varphi$$

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Obrót



Rys. 2: Obrót punktu P_1 o kąt φ wokół początku układu współrzędnych na płaszczyźnie

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Obrót

Możemy tę transformację obrotu zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Przejdźmy do *współrzędnych jednorodnych*: punkty z $\mathbb{R}^2$ traktujemy jako elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ leżące w płaszczyźnie $z = 1$, czyli o trzech współrzędnych $(x, y, 1)$

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Obrót i translacja we współrzędnych jednorodnych

Translacja

$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót

$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translacja i obrót punktu w płaszczyźnie

Obrót i translacja we współrzędnych jednorodnych wokół dowolnego punktu (x_0, y_0)

$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli $P' = P\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{R}_\varphi\,\mathbf{T}_2$

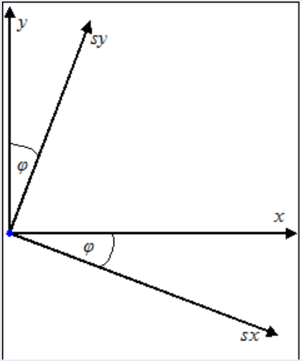
Skalowanie

Skalowanie we współrzędnych jednorodnych

$P \longrightarrow P' = (sx\, x, sy\, y)$, czyli

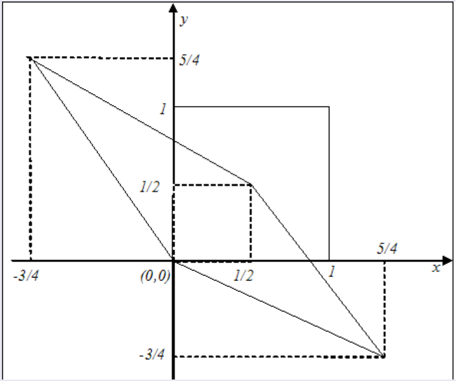
$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skalowanie



Rys. 3: Skalowanie w kierunkach skośnych do osi układu

Skalowanie



Rys. 4: Obraz kwadratu jednostkowego przy skalowaniu określonym kątem $\varphi = 30°$ i mnożnikami $sx = 2$ i $sy = 1/2$

Jednokładność

Jednokładnością o środku $S = (x_0, y_0)$ i skali $k \neq 0$ nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem punktu $P = (x, y)$ 1est taki punkt $P' = (x', y')$, że $SP' = kSP$, a zatem

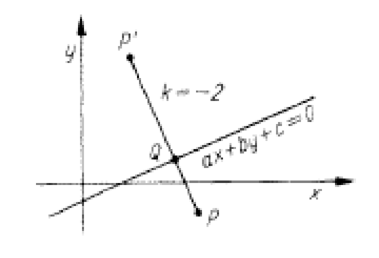
$$(x', y') = (x_0, y_0) + k(x - x_0, y - y_0)$$

a w notacji macierzowej

$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ (1-k)x_0 & (1-k)y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla $k = -1$ przekształcenie takie jest symetrią o środku w punkcie S

Powinowactwo prostokątne



Rys. 5: Powinowactwo prostokątne

Powinowactwo prostokątne

Wektor $[a, b] \perp$ do prostej $ax + by + c = 0$. Punkt Q jest zatem równy $P + t[a, b]$ dla pewnej wartości parametru t. Wartość t wyznaczamy z warunku, że Q leży na osi powinowactwa, a więc

$$a(x + ta) + b(y + tb) + c = 0$$

Stąd

$$t = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2} \qquad \text{i} \qquad Q = (x, y) - \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}(a, b)$$

W omawianym przekształceniu obrazem punktu P ma być punt P' spełniający zależność $QP' = k\,QP$, a więc

$$P' = Q + k(P - Q)$$

Powinowactwo prostokątne

Ostatecznie

$$P' = (x, y) + (k-1)\frac{ax+by+c}{a^2+b^2}(a, b)$$

lub w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} x', & y', & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, & y, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+w^2a & wab & 0 \\ wab & 1+wb^2 & 0 \\ wac & wbc & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $w = (k-1)/(a^2+b^2)$. Dla $k = 1$ to jest symetria osiowa.
Odległość P od Q

$$\rho = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Literatura

[1] M. Jankowski, Elementy grafiki komputerowej, WNT, 2006

[2] Tablice matematyczne, fizyczne i astronomiczne, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1984

Koniec? :-(

Koniec wykładu 3