

Fizyka dla Informatyków
Wykład 9

Termodynamika

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Pojęcia podstawowe

Termodynamika to nauka o energii. Jest to dział fizyki zajmujący się badaniem efektów energetycznych związanych z wszelkimi rodzajami przemian fizycznych i chemicznych wpływających na zmiany energii wewnętrznej analizowanych układów. Wynika stąd, że wbrew rozpowszechnionym sądom, termodynamika nie zajmuje się wyłącznie przemianami cieplnymi, lecz także efektami energetycznymi reakcji chemicznych, przemianami fazowymi, a nawet przemianami jądrowym i energią elektryczną.

Pojęcia podstawowe

W rozwoju historycznym wprowadzono podział termodynamiki na bardziej szczegółowe części, uwzględniające postęp w badaniach lub jej praktyczne zastosowania. Mamy więc:

- termodynamikę klasyczną
- termodynamikę kwantową
- termodynamikę statystyczną
- termodynamikę techniczną
- termodynamikę chemiczną
- termodynamikę procesów nierównowagowych

Pojęcia podstawowe

Układ – ciało, przyrząd, urządzenia, wszelki przedmiot, do którego stosujemy rozważania termodynamiczne i który traktujemy jako całość.

Układ termodynamiczny – wzajemne oddziaływania z otoczeniem polegają tylko na wymianie ciepła i pracy – to model jaki sobie tworzymy w celu rozważań termodynamicznych.

Stan układu – zespół wszystkich jego właściwości w danych warunkach; w stanie równowagi właściwości te nie ulegają zmianom lub zmieniają się niezmiernie powoli.

Pojęcia podstawowe

Energia wewnętrzna – suma energii kinetycznej i potencjalnej ruchu cząsteczkowego, czyli suma energii oddziaływań międzycząsteczkowych i wewnątrzcząsteczkowych układu oraz energii ruchu cieplnego cząsteczek – wzrasta wraz z temperaturą (oznaczana zwykle jako U lub E_w).

To nie jest ciepło!

Ciepło przechodzi z ciała cieplejszego do chłodniejszego. Ciepło nie jest energią, jaką ciało posiada, lecz energią przechodzącą z jednego ciała do innego.

Ciało nie posiada ciepła, tylko energię wewnętrzną!

Pojęcia podstawowe

Jak wygląda taki ruch chaotyczny molekuł gazu, ilustruje poniższy przykład:

Pokaż ruch termiczny

Pojęcia podstawowe

Ciepło i zimno traktowano przez długi czas jako odrębne jakości, tzn. zimno nie było postrzegane jako mała ilość ciepła.

Przykład: Jean Baptiste Morin (1583 - 1656) uważał, że ciepło i zimno mają pewien maksymalny stopień, którego nie mogą przekroczyć, a także pewien stopień minimalny, poniżej którego nie mogą się obniżyć. Przyjął arbitralne założenie:

$$\text{stopień ciepła} + \text{stopień zimna} = 8$$

Ciepło i praca nie są właściwościami stanu termodynamicznego układu. Interesują nas w sposób zasadniczy te cechy, które zależą od dopływu ciepła lub pracy, a więc: temperatura, ciśnienie, objętość, ciepło właściwe, energia wewnętrzna... – to wielkości (charakterystyczne) stanu.

Temperatura

Temperatura jest miarą "chęci" do dzielenia się ciepłem. Jeśli dwa ciała mają tę samą temperaturę, to w bezpośrednim kontakcie nie przekazują sobie ciepła, gdy zaś mają różną temperaturę, to następuje przekazywanie ciepła z ciała o wyższej temperaturze do ciała o niższej – aż do wyrównania się temperatur obu ciał.

Temperatura

Jeżeli ciało A w kontakcie z ciałem B oddaje mu ciepło, to A ma temperaturę wyższą niż B .

Jeżeli ciała B i C są w równowadze cieplnej z ciałem A , to są również w równowadze cieplnej ze sobą i mają tę samą temperaturę.

Bardzo łatwo jest ustalić, które z dwu ciał ma temperaturę wyższą, znacznie trudniej jest określić skalę temperatur, czyli zdefiniować temperaturę ilościowo.

Temperatura

Początki termometrii (termometry)

Pierwsze termoskopy powietrzne:

Galileo Galilei (1603 ?)

Santorio Santori (1611)

Cornelius Drebbel (>1606)

Robert Fludd (1617 ?)

Pierwszy termometr cieczowy

Jean Rey (1631)

Temperatura

Początki termometrii

Punkty stałe:

1665 Boyle zamarzanie olejku anyżowego

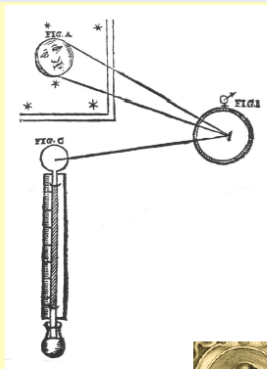
Huygens zamarzanie (lub wrzenie) wody

Hooke zamarzanie wody

1688 Dalencé topnienie śniegu (-10°) i topnienie masła (10°)

1694 Renaldini zamarzanie i wrzenie wody (przedział 120°)

Temperatura



Santorio 1611



Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Empiryczne skale temperatur

Skala Celsjusza

Wykorzystuje rozszerzalność rtęci względem szkła (jenajskiego). Termometr składa się ze szklanego zbiorniczka napełnionego rtęcią i zakończonego długą kapilarą o stałym przekroju. Do roku 1954 cechowanie termometru odbywało się przez ustalenie na skali termometru dwu punktów (kresiek):

- 1 0°C , dla stanu równowagi lodu z wodą nasyconą powietrzem przy normalnym ciśnieniu atmosferycznym (nad swobodną powierzchnią wody znajduje się powietrze);
- 2 100°C , dla stanu równowagi z wrzącą wodą pod stałym ciśnieniem.

Odległość między tymi dwiema kreskami jest podzielona na 100 równych części. Do mierzenia temperatur wyższych od temperatury wrzenia rtęci można zastosować termometr rtęciowy o naczyniu kwarcowym wypełnionym dodatkowo azotem pod ciśnieniem, co powoduje, że rtęć wrze w wyższej temperaturze. Do temperatur niskich stosuje się termometry napełnione pentanem, co umożliwia mierzenie temperatur nawet do -100°C .

Empiryczne skale temperatur

Termometr gazowy

składa się z banki szklanej wypełnionej gazem (hel lub wodór) i zakończonej kapilarą połączoną z węzłem gumowym wypełnionym rtęcią i zakończonym szklaną rurką. Jeżeli objętość gazu w bańce jest stała (stały poziom rtęci w prawej części termometru, to zgodnie z prawem Charlesa ciśnienie gazu jest liniową funkcją temperatury

$$p(T) = p_0(1 + \alpha T), \quad (1)$$

p_0 – ciśnienie gazu w temperaturze 0°C , przy czym

$$p_0 = b + h_0, \quad (2)$$

b – ciśnienie atmosferyczne, h_0 – różnica poziomów w obu ramionach termometru.

Empiryczne skale temperatur

Bezwzględna skala temperatur

Współczynnik rozszerzalności gazu

$$\alpha = \frac{1}{273,15} = 0,0036604. \quad (3)$$

Ekstrapolując wzór (1) do wartości $p = 0$, otrzymujemy

$$T = -273,15^{\circ}\text{C}. \quad (4)$$

To **zero bezwzględne temperatury** w skali Kelvina

$$T^{\circ}\text{K} = 273,15 + T^{\circ}\text{C}. \quad (5)$$

Empiryczne skale temperatur

Skala Fahrenheita

Skala Fahrenheita to skala temperatury, obecnie stosowana głównie w USA. Zaproponował ją w roku 1715 **Daniel Gabriel Fahrenheit**. Jako punkt zerowy skali wyznaczył najniższą temperaturę zimy 1708/1709, zanotowaną w Gdańsku (jego rodzinnym mieście), a przez 100° oznaczył temperaturą swego ciała. Na skutek przypadkowego błędu (miał wtedy stan podgorączkowy) skala się "przesunęła" i 100°F oznaczało $37,8^\circ\text{C}$. W roku 1724 definicję tę zmieniono na następującą:

- 0°F – temperatura mieszaniny wody i lodu z salmiakiem lub solą,
- 32°F – temperatura mieszaniny wody i lodu (temperatura topnienia lodu).

Empiryczne skale temperatur

Przeliczanie temperatur

- Fahrenheit \leftrightarrow Celsjusz

$$T_F = 32 + \frac{9}{5} T_C, \quad T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32),$$

- Kelvin \leftrightarrow Celsjusz

$$T_K = T_C - 273,15, \quad T_C = T_K + 273,15.$$

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Pierwsza zasada termodynamiki

Jeżeli układ termodynamiczny pobiera pracę nie ulegając przy tym żadnym trwałym zmianom, to oddaje ciepło otoczeniu i odwrotnie.

Jednostki: $1 \text{ cal} = 0,427 \text{ kGm}$

I zasada

Suma pobranych przez układ ciepła i pracy równa się przyrostowi energii wewnętrznej, będącej funkcją stanu układu

$$dU = dQ + dA. \quad (6)$$

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 **Zasady termodynamiki**
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - **Druga zasada termodynamiki**
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Druga zasada termodynamiki

I zasada termodynamiki rozwiązuje zagadnienie przemian ciepła i pracy tylko częściowo. Orzeka ona tylko, że wewnętrzna energia układu wzrasta o łączną wartość pobranego ciepła i pracy. Kiedy i dlaczego ta przemiana zachodzi – wymaga bardziej dokładnego badania.

Doświadczenie wykazało, że

- 1 niemożliwe jest urządzenie pozwalające wytwarzać pracę kosztem ciepła jednego tylko zbiornika bez jednoczesnego wywołania innych przemian;
- 2 niemożliwe jest urządzenie pozwalające przeprowadzić ciepło z niższej temperatury do wyższej bez jednoczesnego wywołania innych przemian.

Każde z tych stwierdzeń wyraża II zasadę termodynamiki.

Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 – 1832)

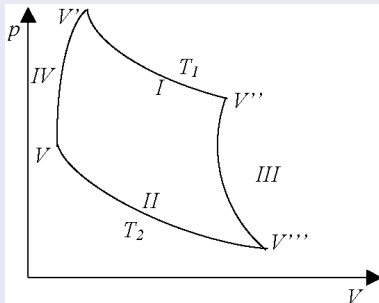


Rys. 2: Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 – 1832)

"Wytwarzanie mocy poruszającej w maszynie parowej nie jest spowodowane zużyciem ciepła, lecz jego przejściem od ciała gorętszego do zimniejszego – to znaczy zachodzi wskutek przywrócenia w nim równowagi, naruszonej przez działanie chemiczne w rodzaju spalania, lub przez jakąś inną przyczynę. Zobaczymy, że ta zasada stosuje się do wszystkich maszyn cieplnych..."

Cykl Carnota dla gazu doskonałego

Cykl Carnota dla gazu doskonałego złożony jest z dwu przemian adiabatycznych i dwu izotermicznych. Poniższy rysunek omówimy na kolejnych stronach.



Rys. 3: Cykl Carnota

Cykl Carnota dla gazu doskonałego

Musimy tu uwzględnić **prawo Gay-Lussaca** (na razie wynika ono z doświadczenia): energia wewnętrzna gazu doskonałego nie zależy od jego objętości, czyli

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0, \quad U = U(T). \quad (7)$$

1.



Gaz w temperaturze T_2 sprężamy adiabatycznie, czyli bez dopływu lub odpływu ciepła, od objętości V do objętości V' bardzo powoli, aż temperatura osiągnie wartość T_1 . Energia wewnętrzna wzrasta od $U_2 = U(T_2)$ do $U_1 = U(T_1)$ kosztem pobranej pracy $U_1 - U_2$, ponieważ wymiany ciepła z otoczeniem nie ma (linia IV na rys. 3).

Cykl Carnota dla gazu doskonałego

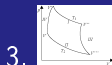


Rozprężamy gaz do objętości V'' izotermicznie przy stałej temperaturze T_1 (linia 1 na rys. 3), dzięki wymianie ciepła z otoczeniem. Energia wewnętrzna nie ulega zmianie. Praca pobrana

$$\Delta A_I = - \int_{V'}^{V''} p dV = -nRT_1 \int_{V'}^{V''} \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}, \quad (8)$$

jest ujemna (praca wykonana przez gaz – dodatnia) i musi być skompensowana przez dopływ ciepła z zewnątrz.

Cykl Carnota dla gazu doskonałego



Rozprężamy gaz adiabatycznie do temperatury T_2 i do objętości V''' (linia III na rys. 3). Energia wewnętrzna zmniejsza się od U_1 do U_2 , wskutek pracy wykonanej przez gaz.

4.

Sprężamy gaz izotermicznie przy temperaturze T_2 do objętości początkowej V . Energia wewnętrzna nie ulega zmianie, ponieważ pobrana praca

$$\Delta A_{II} = - \int_{V'''}^V p dV = nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}, \quad (9)$$

jest dodatnia i jest skompensowana przez odpowiedni odpływ ciepła.

Cykl Carnota dla gazu doskonałego

Droga	Temperatura	Praca pobrana	Ciepło pobrane
<i>IV</i>	$T_2 \rightarrow T_1$	$U_1 - U_2$	0
<i>I</i>	T_1	$-nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}$	$nRT_1 \ln \frac{V''}{V'}$
<i>III</i>	$T_1 \rightarrow T_2$	$U_2 - U_1$	0
<i>II</i>	T_2	$nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}$	$-nRT_2 \ln \frac{V'''}{V}$
Carnot		$I + III$	$I + III$

T_1 – temperatura wyższa, T_2 – temperatura niższa, U – energia wewnętrzna, A – praca, Q – ilość ciepła, V – objętość, p – ciśnienie, R – stała gazowa Rydberga $8,31441 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, n – liczba moli

Zjawiska odwracalne i nieodwracalne

Cykl Carnota jest odwracalny, może przebiegać zarówno w jednym jak i w drugim kierunku – czy jest w rzeczywistości możliwy? Mamy tu nieprzerwany ciąg stanów równowagi, a nie ciąg przemian charakteryzujących rzeczywiste procesy.

Układ jest w równowadze, jeżeli nie ma nieskończenie małych przemian odwracalnych związanych z wykonaniem pracy. Żaden proces nieodwracalny nie jest możliwy, gdyż nie ma pracy, która może być rozproszona.

Entropia

W przemianach nieodwracalnych i odwracalnych prowadzących ze stanu 1 do stanu 2 następuje wg I zasady termodynamiki taka sama zmiana energii

$$dU = dQ_{nieodwr} + dA_{nieodwr}, \quad dU = dQ_{odwr} + dA_{odwr}, \quad (10)$$

gdyż zależy wyłącznie od stanów początkowego i końcowego, a nie od drogi przejścia. Jednakże praca pobrana przez układ na drodze nieodwracalnej jest większa niż na drodze odwracalnej, a ciepło pobrane odpowiednio mniejsze.

Ubytek doprowadzonego ciepła zredukowanego na każdej drodze nieodwracalnej jest pokryty przez zużycie pracy dq , które zawsze ma miejsce w procesach nieodwracalnych. Mamy więc

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{odwr}}{T} = \int_1^2 \frac{dQ_{nieodwr}}{T} + \int_1^2 \frac{dq}{T}. \quad (11)$$

Entropia

W **przemianach odwracalnych** przyrost entropii układu równy jest ubytkowi entropii zbiorników ciepła zasilających układ.

W **przemianach nieodwracalnych** przyrost entropii układu jest większy niż ubytek entropii zbiorników ciepła.

W układzie rozszerzonym, obejmującym również zbiorniki ciepła, entropia nie ulega zmianie w przemianach odwracalnych, rośnie w przemianach nieodwracalnych.

Zachodzą ważne związki:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} - \frac{dA}{T}, \quad (12)$$

$$dQ = T dS, \quad dA = dU - T dS. \quad (13)$$

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

III zasada termodynamiki

Wzór (12) nie określa entropii jednoznacznie, dowolna stała dodana do S nie zmienia tego wzoru.

Z teorii kwantów wynika, że jakikolwiek proces zachodzący w temperaturze 0°K nie powoduje wzrostu entropii.

Jest to potwierdzenie sformułowanej jeszcze przed powstaniem teorii kwantów **twierdzenia Nernsta** (zwanego czasami III zasadą termodynamiki), że

$$S = 0, \quad \text{dla } T = 0^\circ\text{K}. \quad (14)$$

Potencjały termodynamiczne

Potencjały termodynamiczne - wielkości fizyczne związane z układem termodynamicznym, mają wymiar energii. Nazywane są „potencjałami”, ponieważ są odpowiednikami energii potencjalnej w mechanice. Cztery, najczęściej używane potencjały termodynamiczne określone są dla założonych stałych, nie zmieniających się w trakcie procesu par parametrów przemiany termodynamicznej: (S, V) , (T, V) , (S, P) , lub (T, P) , gdzie S - entropia, V - objętość, P - ciśnienie, T - temperatura.

Nazwa potencjału	Formuła	Parametry przemiany
Energia wewnętrzna	U	S, V, N_i
Swobodna energia Helmholtza	$A = U - TS$	T, V, N_i
Entalpia	$H = U + PV$	S, P, N_i
Entalpia swobodna Gibbsa	$G = U + PV - TS$	T, P, N_i

N_i - liczba cząsteczek typu i . W układach, w których liczba cząsteczek poszczególnych typów nie zmienia się, parametr ten jest ignorowany.

Termodynamika zjawisk nieodwracalnych

Termodynamika klasyczna odróżnia zjawiska odwracalne i nieodwracalne, ale **wszystkie jej wypowiedzi dotyczą tylko stanów równowagi, a nie przebiegu zjawisk.**

Entropia może być zdefiniowana tylko dla stanów równowagi lub stanów bardzo bliskich stanowi równowagi. Wraz z entropią zachowują sens wszystkie inne wielkości. W szczególności równanie Gibbsa

$$TdS = dU + pdV - \sum_i \mu_i dN_i, \quad (15)$$

wyrażające związek pomiędzy zmianą entropii, energii wewnętrznej, objętości i liczb moli materii.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Temperatura
 - Skale temperatur
- 3 Zasady termodynamiki
 - Pierwsza zasada termodynamiki
 - Druga zasada termodynamiki
 - Trzecia zasada termodynamiki
- 4 Termodynamika zjawisk nieodwracalnych
 - Równanie przewodnictwa ciepła

Przewodnictwo ciepła

Przewodnictwo ciepła, to zjawisko przepływu energii pomiędzy nierównomiernie ogrzаныmi ciałami.

W przypadku gazu polega ono na wzajemnym przekazywaniu energii molekuł w ich bezładnym ruchu cieplnym, w rezultacie prowadzącym do wyrównywania się (uśredniania) tej energii, a więc i miary ich energii kinetycznej, czyli temperatury.

Dla ciał stałych w mikroskopowym opisie procesu przewodnictwa ciepła istotną rolę pełnią drgania sieci krystalicznej (fonony) i wzajemne oddziaływanie nośników prądu (gaz elektronowy).

Przewodnictwo ciepła

W przypadku stacjonarnym, przewodnictwo ciepła opisuje prawo wyrażone równaniem:

$$Q = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

gdzie: Q - wektor gęstości strumienia cieplnego, λ - współczynnik przewodzenia ciepła, T - temperatura. Dla ciał stałych

$$\lambda = \lambda_e + \lambda_s,$$

(odpowiednio współczynniki przewodzenia ciepła dla gazu elektronowego i sieci krystalicznej).

Przewodnictwo ciepła jest jednym ze zjawisk opisywanych przez teorię transportu.

Przewodnictwo ciepła

Przewodność cieplna, czyli inaczej nazywany współczynnik przewodnictwa ciepła, określa zdolność substancji do przewodzenia ciepła. W tych samych warunkach więcej ciepła przepłynie przez substancję o większym współczynniku przewodności cieplnej. Jednostką współczynnika przewodzenia ciepła w układzie SI jest $[J/(m \cdot s \cdot K)] = W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ (wat na metr kelwin).

Przewodnictwo ciepła

Przykład

Dla ciała o kształcie prostopadłościanu (pręta) przewodzącego ciepło w warunkach stacjonarnych, ilość przekazanego ciepła jest zależna od substancji, proporcjonalna do przekroju ciała różnicy temperatur oraz czasu przepływu ciepła:

$$\Delta Q = k \frac{S}{L} \Delta t \Delta T,$$

Z powyższego wynika, że:

$$k = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{L}{S \Delta T},$$

gdzie k - współczynnik przewodnictwa cieplnego, ΔQ - ilość ciepła przepływającego przez ciało, Δt - czas przepływu, L - długość (ciała) pręta, S - przekrój poprzeczny pręta, ΔT - różnica temperatur w kierunku przewodzenia ciepła.

Wzór ten jest prawdziwy tylko dla wymiany cieplnej odbywającej się tylko przez przewodzenie ciepła. Nie może występować promieniowanie cieplne ani konwekcja.

Równanie przewodnictwa ciepła

Ciepło przepływa od miejsca o wyższej temperaturze do miejsca o niższej temperaturze, następuje wyrównanie temperatur i po pewnym czasie następuje równowaga cieplna. Strumień ciepła przez zamkniętą powierzchnię

$$\iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}).$$

Z twierdzenia Gaussa - Ostrogradzkiego

$$\iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}) = \iiint \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Równanie przewodnictwa ciepła

Energia tracona przez element dV wskutek przewodnictwa na jednostkę czasu wynosi

$$\operatorname{div} \mathbf{j} dV = -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) dV.$$

Z drugiej strony w elemencie dV może powstać lub znikać ciepło na skutek różnych innych procesów (reakcje chemiczne, promieniowanie, prąd elektryczny – ciepło Joula). Niech f – ilość ciepła zyskana w ciągu sekundy na jednostkę objętości.

$$(f - \operatorname{div} \mathbf{j}) dV \tag{16}$$

Tyle jednostek ciepła, idących na ogrzanie ciała, zyskuje element objętości.

Równanie przewodnictwa ciepła

Wzrostowi temperatury $\partial T/\partial t$ odpowiada dopływ ciepła

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV ,$$

c – ciepło właściwe, ρ – gęstość ciała. Dopływ ten musi być pokryty przez ilość ciepła (16), czyli

$$c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = f + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T). \quad (17)$$

Równanie przewodnictwa ciepła

Równanie różniczkowe (17) opisuje zjawiska we wnętrzu ciał. Należy uwzględnić jeszcze warunki brzegowe na powierzchni, np. utrzymywanie stałej (lub zmiennej) określonej temperatury w określonych obszarach powierzchni, lub też doprowadzamy lub odprowadzamy strumień ciepła.

Równanie przewodnictwa ciepła

Równanie przewodnictwa cieplnego to równanie różniczkowe cząstkowe z warunkami brzegowymi Dirichleta, opisujące przepływ ciepła przy zadanym jego początkowym rozkładzie w ośrodku. Równanie ma postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_+,$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

gdzie $g(x)$ – początkowy rozkład ciepła, $u(x, t)$ – szukana zależność rozkładu od czasu t .

Rozwiązanie równania przewodnictwa

Poszukujemy rozwiązań w klasie regularności
 $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$.

Rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego jest:

$$E(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4t}\right).$$

Można sprawdzić, że spełnia ono warunki:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = 1,$$

$$E_t - \Delta_x E = 0.$$

Nieskończenie szybkie rozchodzenie się ciepła

Przypuśćmy, że g ma zwarty nośnik i na pewnej kuli B jest $g > 0$.
Wówczas

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) E(x - y, t) \geq 0,$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Zatem ciepło dochodzi w dowolnie krótkim czasie do każdego punktu przestrzeni, czyli rozchodzi się nieskończenie szybko. Tak oczywiście w rzeczywistości nie jest, dlatego w praktyce często używa się równania przewodnictwa cieplnego z dodatkowymi członami, powodującymi zmianę typu równania różniczkowego.

Koniec? :-)

Koniec wykładu 9