Fizyka dla Informatyków
Wykład 8

Mechanika cieczy i gazów

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2008

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Definicja cieczy

Podczas ostatniego wykładu wspomnieliśmy, że symetryczno-kulisty tensor napięć ma postać

$$S = \left\| \begin{array}{ccc} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{array} \right\| \tag{1}$$

czyli

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p\,, \\ \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Materiały mające tę właściwość nazywamy **cieczami nielepkimi**.

W cieczach nielepkich istnieją jedynie jednakowe we wszystkich kierunkach napięcia normalne, a napięcia styczne znikają.

Definicja cieczy

Wektor tensora napięć

$$\mathbf{S}_n = -p\,\mathbf{n}\,, \tag{3}$$

jest zawsze równoległy do wektora normalnego **n** do wydzielonej myślowo powierzchni, ale z przeciwnym znakiem (tak się umawiamy).

Długość wektora napięć

$$S_n = |\mathbf{S}_n| = \sqrt{S_{nx}^2 + S_{ny}^2 + S_{nz}^2} = p\,, \tag{4}$$

czyli wartość siły działającej na element powierzchni df wynosi $p\,df$.

Definicja cieczy

Prawo Pascala

Z (1) wynika, że kwadryka tensora napięć jest kulą: to jest właśnie prawo Pascala:
Ciśnienie w cieczy rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach i jest zawsze skierowane prostopadle do powierzchni granicznej.

Ciało izotropowe jest w ogólności opisywane przez dwie stałe materiałowe Lamé: λ i μ, opisujące potencjał sprężysty Lamé

$$\mathcal{V} = -PJ_1 + \mu S_1 + \frac{\lambda}{2} J_1^2 \,, \tag{5}$$

P – (nie)znikające napięcie początkowe, $J_1 = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w$ – pierwszy niezmiennik, $S_1 = \varepsilon_u^2 + \varepsilon_v^2 + \varepsilon_w^2$ – symetryczny niezmiennik drugiego stopnia.

Definicja cieczy

Potencjał Lamé

$$\begin{aligned} \sigma_i &= -P + \lambda J_1 + 2\mu\varepsilon_i\,, \\ \tau_i &= 2\mu\gamma_i\,, \qquad i = x, y, z \end{aligned} \tag{6}$$

Tensor kulisto-symetryczny ma znikające człony pozadiagonalne, więc $\mu = 0$, czyli ciecze są charakteryzowane tylko przez jedną stałą sprężystości λ:

$$p = P - \lambda\, J_1\,. \tag{7}$$

skąd można wywnioskować, że energia sprężysta jest związana tylko ze zmianą objętości, skąd wynika, że ciecze nielepkie nie stawiają żadnego oporu zmianom kształtu: tę właściwość można przyjąć za definicję cieczy.

Spis treści

Równania hydrodynamiki dla cieczy nielepkich

Równania Eulera

Równania Eulera stosujemy, gdy interesuje nas rozkład pola prędkości cieczy. Ogólne równanie ruchu mechaniki ośrodków ciągłych:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\,\mathbf{F} + \mathrm{Div}\,S\,, \tag{8}$$

$$\mathrm{Div}\,S = -\,\mathrm{grad}\,p\,. \tag{9}$$

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\,\mathbf{v} = 0\,. \tag{10}$$

Równania hydrodynamiki dla cieczy nielepkich

Równanie Eulera

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p\,. \tag{11}$$

Termodynamiczne równanie stanu

$$f(\rho, p, T) = 0 \tag{12}$$

$\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$ – pochodna substancjalna Mamy pięć nieliniowych równań (11), (10), (12) na pięć niewiadomych $\mathbf{v}, \rho, p$. Rozwiązanie tych równań daje nam jedynie rozkład pola prędkości cieczy, nie podaje jednak torów poszczególnych punktów cieczy.

Równania hydrodynamiki dla cieczy nielepkich

Ciecz nieściśliwa

W przypadku cieczy nieściśliwej $\rho(x, t) = \text{const}$ wystarczą dwa równania:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p \,, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Równania hydrodynamiki dla cieczy nielepkich

Równania Lagrange'a

Równania Lagrange'a stosujemy, gdy interesuje nas ruch określonego punktu (cząstki) cieczy: niech w chwili $t = 0$ ma on współrzędne (a, b, c). Będziemy śledzili ruch tego punktu, czyli $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t)$. Dla tegoż ustalonego punktu prędkość $\mathbf{v}$ jest tylko funkcją czasu i równanie (11) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p\,. \tag{14}$$

Tu występują zmienne (x, y, z), podczas gdy zmiennymi niezależnymi są wielkości (a, b, c). Dokonujemy zamiany zmiennych i równania hydrodynamiczne Lagrange'a przyjmują postać:

Równania hydrodynamiki dla cieczy nielepkich

Równania Lagrange'a

$$\mathcal{J}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \mathbf{F}\right) + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}_{(a,b,c)}\, p = 0\,, \tag{15}$$

$$\mathcal{J} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{array} \right\| \tag{16}$$

Wyznacznik tej macierzy, to Jakobian

$$\Delta = |\mathcal{J}| = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)}\,. \tag{17}$$

Spis treści

Równania hydrodynamiki dla cieczy lepkich

W cieczach rzeczywistych naprężenia styczne nie znikają, czyli występuje tarcie pomiędzy sąsiadującymi warstewkami cieczy. Warstwy te wyznaczają kierunek ruchu cieczy. Siły tarcia zależą od względnej prędkości warstw

$$d\mathbf{v} = \dot{T}\, d\mathbf{r}\,. \tag{18}$$

$\dot{T}$ – tensor prędkości względnej.

Tensor $\dot{T}$ składa się z dwu części: $\dot{T} = \dot{T}^{(d)} + \dot{T}^{(a)}$, gdzie $\dot{T}^{(s)} = \dot{T}^{(d)}$ – część symetryczna tensora $\dot{T}$, $\dot{T}^{(a)}$ – część niesymetryczna tensora $\dot{T}$.

Równania hydrodynamiki dla cieczy lepkich

Tarcie wewnętrzne

Tensor $\dot{T}^{(a)}$ opisuje ruch obrotowy (typu ciała sztywnego), więc nie wywiera wpływu na tarcie wewnętrzne. Odpowiedzialny za tarcie wewnętrzne jest zatem tensor $\dot{T}^{(s)}$:

$$\dot{T}^{(s)} = \begin{Vmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\gamma}_z & \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_z & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y & \dot{\gamma}_x & \dot{\varepsilon}_z \end{Vmatrix} , \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} , \qquad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} , \qquad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} , \\ \dot{\gamma}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) , \quad \dot{\gamma}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) , \quad \dot{\gamma}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) . \end{gathered} \tag{20}$$

Równania hydrodynamiki dla cieczy lepkich

Tarcie wewnętrzne

Ogólne równanie mechaniki ośrodków ciągłych

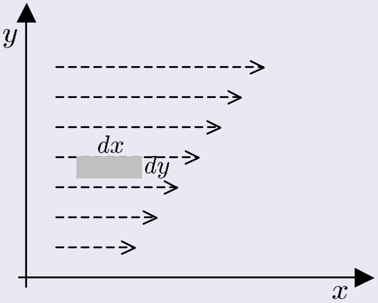
$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\,\mathbf{F} + \mathrm{Div}(S^{(e)} + S^{(t)})\,, \tag{21}$$

Rozłożyliśmy tensor S na dwie części: $S^{(e)}$ – tensor sprężysty, $S^{(t)}$ – tensor opisujący tarcie wewnętrzne, znikający w stanie statycznym.

Rozważmy ciecz, płynącą w kierunku osi x z prędkością $\mathbf{u}$ rosnącą ze wzrostem y (Rys. 1). Na cząstki pod elementem $df = dx\,dy$ działa siła $\mathbf{i}\,\eta dx\,dz\,\partial u/\partial y$, a na cząstki nad nim siła $-\mathbf{i}\,\eta\,dx\,dz\,\partial u/\partial y$ proporcjonalna do spadku prędkości i do elementu powierzchni, η – współczynnik lepkości albo współczynnik tarcia wewnętrznego.

Równania hydrodynamiki dla cieczy lepkich

Tarcie wewnętrzne



Rys. 1: Warstwy cieczy i element powierzchni $df = dx\,dy$

Równania hydrodynamiki dla cieczy lepkich

Równanie Naviera-Stokes'a

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\, \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{3}\eta \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \triangle \mathbf{v}\,, \tag{22}$$

$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ – pochodna substancjalna.
Równanie N-S czasami podaje się w postaci podanej przez Maxwella

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{3}\varepsilon \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \varepsilon \triangle \mathbf{v}\,, \tag{23}$$

ε – kinetyczny współczynnik tarcia (lub kinetyczna stała lepkości).

Spis treści

Sformułowanie zagadnienia

Równanie Eulera

$$\rho\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho\,\mathbf{F} - \operatorname{grad} p\,. \tag{24}$$

W przypadku równowagi $\mathbf{v} = 0$

$$\rho\,\mathbf{F} = \operatorname{grad} p\,. \tag{25}$$

Równanie to jest słuszne zarówno dla cieczy nielepkich i jak i dla lepkich.

Hydrostatyka

Dla cieczy nieściśliwych jest liniową funkcją potencjału. Niech pole sił masowych pochodzi od potencjału sił grawitacyjnych

$$\mathbf{F} = -\mathbf{k}\, g = -\operatorname{grad} V\,. \tag{26}$$

$\mathbf{k}$ – wektor jednostkowy w kierunku osi z, g – przyspieszenie ziemskie.

$$V = g\, z + c \equiv g\, z\,. \tag{27}$$

Jeśli $V(z=0)=0$, to $c=0$.

Spis treści

Hydrostatyka

Paradoks hydrostatyczny

Mamy więc

$$p = -\rho g \ z \, . \tag{28}$$

Jeśli ciecz znajduje się w naczyniu otwartym, to na powierzchni cieczy ciśnienie jest stałe i równe ciśnieniu atmosferycznemu p_0. Zgodnie z (28) powierzchnie równego ciśnienia są horyzontalne, więc tu powierzchnia cieczy będzie pozioma.

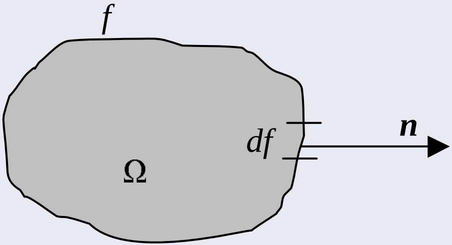
Wniosek:

w naczyniach połączonych wysokości słupów cieczy są jednakowe i nie zależą od kształtu naczynia – zjawisko to nazywamy paradoksem hydrostatycznym.

Spis treści

Hydrostatyka

Zasada Archimedesa



Rys. 2: Rysunek do wyprowadzenia zasady Archimedesa

Hydrostatyka

Zasada Archimedesa

Niech w cieczy w stanie równowagi i na którą działają siły masowe $\mathbf{F}$ znajduje się obce ciało zajmujące obszar Ω, o powierzchni f (Rys. 2). Obliczmy siłę wywieraną przez ciśnienie cieczy na zanurzone w niej ciało.

Na element df powierzchni ciała działa siła $-\mathbf{n}\, p\, df$, czyli całkowita siła

$$\mathbf{P} = -\int_{\Omega} \operatorname{grad} p \, d\tau \,. \tag{29}$$

Z drugiej strony

$$\operatorname{grad} p = \rho\, \mathbf{F} \,, \tag{30}$$

Z (29) i (30) $\rightsquigarrow$

$$\mathbf{P} = -\int_{\Omega} \rho\, \mathbf{F}\, d\tau \,. \tag{31}$$

Hydrostatyka

Zasada Archimedesa

Na ciało zanurzone w cieczy działa siła parcia.
Gdy $\mathbf{F}$ jest polem sił grawitacyjnych, wtedy $\mathbf{F} = -\mathbf{k}g$, i

$$\mathbf{P} = +g\mathbf{k} \int_{\Omega} \rho \, d\tau \, . \tag{32}$$

Całka $m = \int_{\Omega} \rho \, d\tau$ – masa w obszarze Ω, czyli $m_c = g \int_{\Omega} \rho \, d\tau$ – ciężar cieczy w Ω. Zatem:
ciało zanurzone w płynie (cieczy, gazie) traci tyle na ciężarze, ile waży wyparty przez nie płyn.

Spis treści

Równanie Bernoulliego

Założenia

1. ciecz jest nielepka,
2. istnieje zależność funkcjonalna $h = h(p)$,
3. ruch jest bezwirowy, czyli istnieje takie φ, że $\mathbf{v} = -grad\varphi$,
4. siły masowe są potencjalne, czyli istnieje takie V, że $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$.

Równanie Bernoulliego

Dzięki założeniom 1 i 2 równanie Eulera można zapisać w postaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } v \times v = F - \mathrm{grad}(U + \frac{v^2}{2})\,, \tag{33}$$

$$U = \int_0^p \frac{dp}{\rho}\,. \tag{34}$$

Prawo Stokesa

Prawo Stokesa

Na kulkę o promieniu r poruszającą się z prędkością v w cieczy o współczynniku lepkości η, ale w taki sposób, że ruch cieczy względem kulki jest laminarny, działa siła

$$F = 6\pi\,\eta\;r\,v\,. \tag{35}$$

Taka sama siła działa oczywiście na kulkę nieruchomą umieszczoną w strumieniu cieczy poruszającej się z prędkością v.

Prawo Stokesa

Niech mała kulka o promieniu r spada swobodnie w cieczy lepkiej. Działa na nią siła ciężkości skierowana pionowo w dół

$$F_d = \frac{4}{3}\pi\, r^3\, \rho\, g\,, \tag{36}$$

ρ – gęstość masy kulki.
W kierunku do góry działa siła wyporu

$$F_g = \frac{4}{3}\pi\, r^3\, \rho_c\, g\,, \tag{37}$$

ρ_c – gęstość masy cieczy.

Prawo Stokesa

W początkowej fazie ruchu kulka porusza się ruchem przyśpieszonym, ale ze wzrostem prędkości rośnie siła oporu F i po pewnym czasie wszystkie siły równoważą się

$$F_d - F_g - F = 0\,. \tag{38}$$

Mamy więc

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_c)\,g = 6\pi\,\eta\;r\,v\,, \tag{39}$$

skąd

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{\rho - \rho_c}{\eta} g\,r^2\,. \tag{40}$$

Prawo Stokesa

Wnioski

- Dla małych r prędkość spadania kulek jest mała, więc np. małe kropelki deszczu lub małe kropelki pyłu opadają bardzo powoli.
- Prawo Stokesa można wykorzystać do pomiarów lepkości cieczy i gazów.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 8