

Fizyka dla Informatyków  
Wykład 7

**Mechanika Ośrodków Ciągłych**

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

# Wstęp

- czym dzisiaj będziemy opowiadać?
- mechanice ośrodków ciągłych!

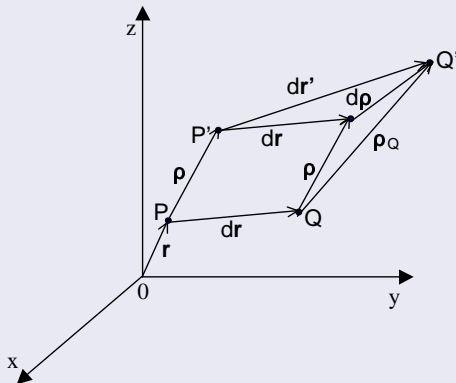
# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste



# Odkształcenie

## Wektor przemieszczenia



Rys. 1: Położenie dwu punktów przed i po przemieszczeniu

## Wektor przemieszczenia

### Oznaczenia

$\mathbf{r}(x, y, z)$  – wektor położenia punktu  $P$ ;

$d\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ} = (dx, dy, dz)$  – wektor względnego położenia punktu  $Q$  względem punktu  $P$ ;

$\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$  – wektor położenia punktu  $Q$  względem początku układu współrzędnych;

$\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{PP'} = (\xi, \eta, \zeta)$  – wektor przemieszczenia punktu  $P$ ;

$\boldsymbol{\rho}_Q = \overrightarrow{QQ'} = \boldsymbol{\rho} + d\boldsymbol{\rho}$  – wektor przemieszczenia punktu  $Q$ ;

$d\mathbf{r}' = \overrightarrow{P'Q'} = d\mathbf{r} + d\boldsymbol{\rho}$  – wektor położenia względnego punktu  $Q'$  względem punktu  $P'$ .

# Odkształcenie

Z Rys. 1 widać, że  $|dr| \neq |dr'|$ . Takie zjawisko nazywamy **odkształceniem** ośrodka materialnego.

## Tensor przemieszczenia względnego

$$\begin{aligned}d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz, \\d\eta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz, \\d\zeta &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz,\end{aligned}\tag{1}$$

$$d\rho = T dr,\tag{2}$$

$T$  – tensor przemieszczenia względnego.

## Tensor położenia względnego

Z Rys. 1 widać, że

$$dr' = dr + d\rho, \quad (3)$$

$$dr' = dr + T dr = (1 + T)dr, \quad (4)$$

"1" rozumiemy jako tensor jednostkowy

$$\|\delta_{\mu\nu}\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (5)$$

Oznaczenie:  $T' = 1 + T$ , i wtedy

$$dr' = T' dr. \quad (6)$$

# Odkształcenie

**Tensor przemieszczenia względnego**  $T$  – jest na ogół tensorem **niesymetrycznym**. Rozłóżmy go na część symetryczną  $T^{(s)}$  i część niesymetryczną  $T^{(a)}$ :

$$T = T^{(s)} + T^{(a)}, \quad (7)$$

$$T^{(s)} = \left\| \begin{array}{ccc} T_{xx} & \frac{1}{2}(T_{xy} + T_{yz}) & \frac{1}{2}(T_{xz} + T_{zx}) \\ \frac{1}{2}(T_{xy} + T_{yz}) & T_{yy} & \frac{1}{2}(T_{yz} + T_{zy}) \\ \frac{1}{2}(T_{xz} + T_{zx}) & \frac{1}{2}(T_{xz} + T_{zx}) & T_{zz} \end{array} \right\| \quad (8)$$

$$T^{(a)} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yz}) & \frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) \\ -\frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yz}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{zy}) \\ -\frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) & \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{zy}) & 0 \end{array} \right\| \quad (9)$$

## Odkształcenie

Wprowadźmy wektor

$$\mathbf{T}^{(a)} = \mathbf{i} \frac{1}{2}(T_{zy} - T_{yz}) + \mathbf{j} \frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) + \mathbf{k} \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{xy}) \quad (10)$$

Korzystając z definicji tensora  $T$  (porównaj (1) i (2))

$$2\mathbf{T}^{(a)} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (11)$$

**Oznaczenie:**  $\mathbf{T}^{(a)} = \mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{\rho} \quad (12)$$

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

## Deformacja

**Oznaczenie:**  $\mathbf{T}^{(s)} = \mathbf{T}^{(d)}$  – tensor odkształcenia czystego ( $d$  jak deformacja)

$$\mathbf{T}^{(d)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \gamma_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \gamma_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z}, & \gamma_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (14)$$



$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – odształcenie podłużne (wzdłużne, właściwe, jednostkowe)

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  – odształcenie poprzeczne

Można łatwo pokazać, że dla dowolnego wektora  $\mathbf{a}$  i niesymetrycznego tensora  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}^{(a)} \mathbf{a} = \mathbf{T}^{(a)} \times \mathbf{a} \quad (15)$$

gdzie wektor  $\mathbf{T}^{(a)}$  ma postać (10)

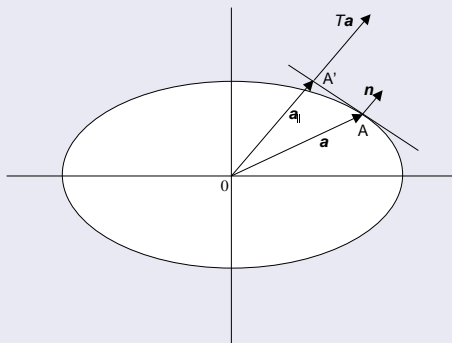
$$\mathbf{T}^{(a)} = \mathbf{i} \frac{1}{2}(T_{zy} - T_{yz}) + \mathbf{j} \frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) + \mathbf{k} \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{xy})$$

czyli

$$d\rho = \mathbf{T}^{(d)} d\mathbf{r} + \mathbf{u} \times d\mathbf{r}. \quad (16)$$

## Geometryczna interpretacja tensora symetrycznego

Każdy tensor symetryczny można sprowadzić na osie główne



Rys. 2: Konstrukcja geometryczna wektora  $T\mathbf{a}$  za pomocą kwadryki tensorowej

## Geometryczna interpretacja tensora symetrycznego

### Równanie kwadryki

Rozważmy wszystkie wektory  $\mathbf{a}$  spełniające równanie

$$\mathbf{a} T \mathbf{a} = F(a_x, a_y, a_z) = \text{const} \neq 0. \quad (17)$$

$$F = T_{xx}a_x^2 + T_{yy}a_y^2 + T_{zz}a_z^2 + 2T_{xy}a_xa_y + 2T_{yz}a_ya_z + 2T_{zx}a_z a_x. \quad (18)$$

Jest to równanie powierzchni drugiego stopnia, ze środkiem w początku wektora  $\mathbf{a}$  – **kwadryka tensorowa** – geometryczna reprezentacja tensora symetrycznego  $T$ .

$$T \mathbf{a} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial a_x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial a_y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial a_z} \right) = \frac{1}{2} \text{grad } F, \quad (19)$$

czyli wektor  $T \mathbf{a}$  jest równoległy do wektora normalnego  $\mathbf{n}$ .

## Geometryczna interpretacja tensora symetrycznego

W ogólności wektory  $\mathbf{a}$  i  $T\mathbf{a}$  mają różne kierunki, ale jak widać z Rys. 2, oba wektory są równoległe, jeśli wektor  $\mathbf{a}$  leży na jednej z trzech osi głównych kwadryki tensorowej. Jeśli wybierzemy prostokątny układ współrzędnych  $u, v, w$  z osiami wzdłuż osi głównych kwadryki i z wersorami  $\mathbf{i}_u, \mathbf{j}_v, \mathbf{k}_w$ , to

$$\mathbf{a}T\mathbf{a} = T_{uu}a_u^2 + T_{vv}a_v^2 + T_{ww}a_w^2. \quad (20)$$

Wektor  $T\mathbf{a}$

$$T\mathbf{a} = \mathbf{i}_u T_{uu}a_u + \mathbf{j}_v T_{vv}a_v + \mathbf{k}_w T_{ww}a_w, \quad (21)$$

czyli wektor  $T\mathbf{a}$  ma składowe na osiach głównych wydłużone w stosunku do wektora  $\mathbf{a}$   $\{T_{uu}, T_{vv}, T_{ww}\}$  - krotnie. Stąd pochodzi słowo **tensor**, od (łac. *tendo, tentendi, tentum*) lub poetycznie *tensum* – **wydłużać**.

## Wydłużenie główne

$$\mathbf{T}^{(d)} = \begin{vmatrix} \varepsilon_u & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_v & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_w \end{vmatrix}. \quad (22)$$

$\varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_w$  – wydłużenia główne.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}_u du + \mathbf{j}_v dv + \mathbf{k}_w dw. \quad (23)$$

Z (22) i (23)  $\rightsquigarrow$

$$d\rho_d = T^{(d)} d\mathbf{r} = \mathbf{i}_u \varepsilon_u du + \mathbf{j}_v \varepsilon_v dv + \mathbf{k}_w \varepsilon_w dw. \quad (24)$$

Kwadryka tensora  $T$

$$dT^{(d)} d\mathbf{r} = \varepsilon_u du^2 + \varepsilon_v dv^2 + \varepsilon_w dw^2. \quad (25)$$

## Wydłużenie główne

### Interpretacja wydłużeń głównych

Z (24)  $\rightsquigarrow$

$$d\xi_d = \varepsilon_u du, \quad d\eta_d = \varepsilon_v dv, \quad d\zeta_d = \varepsilon_w dw, \quad (26)$$

czyli

$$\varepsilon_u = \frac{d\xi_d}{du}, \quad \varepsilon_v = \frac{d\eta_d}{dv}, \quad \varepsilon_w = \frac{d\zeta_d}{dw}. \quad (27)$$

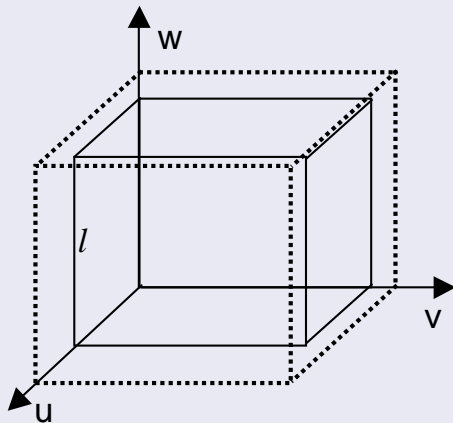
Tak więc, np. wydłużenie główne  $\varepsilon_u$  oznacza względną zmianę odległości, czyli zmianę odległości na jednostkę długości.

Jeżeli przed odkształceniem odległość dwu punktów wynosiła  $du$ , to po odkształceniu wynosi ona

$$du + d\xi_d = (1 + \varepsilon_u) du. \quad (28)$$

Analogicznie dla pozostałych kierunków.

## Właściwe odkształcenie objętościowe



Rys. 3: Zmiana objętości kostki na skutek odkształcenia

## Właściwe odkształcenie objętościowe

### Objętość kostki

$$V = l^3. \quad (29)$$

Wskutek odkształcenia krawędzie kostki ulegną wydłużeniu:

$$\Delta l_u = l(1 + \varepsilon_u), \quad \Delta l_v = l(1 + \varepsilon_v), \quad \Delta l_w = l(1 + \varepsilon_w). \quad (30)$$

Nowa objętość kostki:

$$V' = l^3(1 + \varepsilon_u)(1 + \varepsilon_v)(1 + \varepsilon_w) \approx l^3(1 + \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w) \dots \quad (31)$$

bo  $\varepsilon_i$  – małe. Zmiana objętości:  $\Delta V = V' - V$ . Względna zmiana objętości (na jednostkę objętości):

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w. \quad (32)$$



## Właściwe odształcenie objętościowe

Suma wyrazów na głównej przekątnej tensora jest niezmiennikiem ze względu na zmianę układu współrzędnych (ślad), więc

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (33)$$

ale

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (34)$$

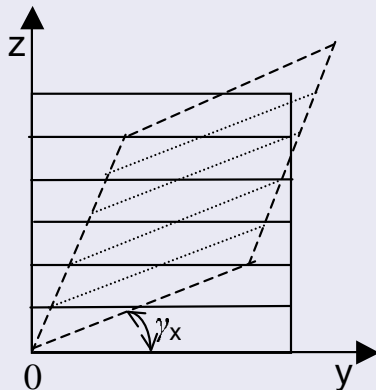
czyli **właściwe odształcenie objętościowe**  $\theta$

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \operatorname{div} \boldsymbol{\rho}, \quad (35)$$

gdzie

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (36)$$

## Odkształcenie poprzeczne



Rys. 4: Ścinanie kwadratu w płaszczyźnie  $y, z$

## Odkształcenie poprzeczne

Z określenia tensora  $T^{(d)}$  (wzór (13))

$$\begin{aligned}d\xi_d &= \varepsilon_x dx + \gamma_z dy + \gamma_y dz, \\d\eta_d &= \gamma_z dx + \varepsilon_y dy + \gamma_x dz, \\d\zeta_d &= \gamma_y dx + \gamma_x dy + \varepsilon_z dz.\end{aligned}\tag{37}$$

Założmy, że tylko  $\gamma_x \neq 0$ , reszta znika. Wtedy:

$$d\xi_d = 0, \quad d\eta_d = \gamma_x dz, \quad d\zeta_d = \gamma_x dy.\tag{38}$$

## Odkształcenie poprzeczne

- Punkty leżą na osi  $x$ :  $\rightsquigarrow dy = dz = 0$  – punkty leżące na osi  $x$  nie zmieniają położenia;
- Punkty leżą na osi  $y$ :  $\rightsquigarrow dx = dz = 0$  – w kierunku osi  $z$  mamy przesunięcie proporcjonalne do  $dy$ , a oś  $y$  doznaje obrotu w kierunku osi  $z$  o kąt  $\gamma_x$  ( $\text{tg } \gamma_x \approx \gamma_x$ );
- Punkty leżą na osi  $z$ :  $\rightsquigarrow dx = dy = 0$  – obrót osi  $z$  w kierunku osi  $y$  o kąt  $\gamma_x$ .

W szczególności, kwadrat leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $x$ , przyjmuje kształt rombu (por. Rys. 4). Mamy zmianę kształtu bez zmiany objętości.

# Kinematyka ośrodków ciągłych

## Definicja prędkości

Prędkością punktu ośrodka nazywamy w mechanice ośrodków ciągłych wektor:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}(x, y, z, t)}{\partial t} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) (x, y, z, t). \quad (39)$$

## Definicja przyspieszenia

Przyspieszeniem punktu ośrodka nazywamy w mechanice ośrodków ciągłych wektor:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (40)$$

## Pochodna lokalna i substancjalna

Rozważmy pewną wielkość fizyczną  $\varphi$  – skalar, wektor lub tensor:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t) = \varphi(x, y, z, t).$$

Można postąpić dwojako:

- 1 albo rozpatrywać zmianę  $\varphi$  w ustalonym punkcie przestrzeni;
- 2 albo badać zmiany  $\varphi$  dla ustalonego, poruszającego się punktu ośrodka.

# Pochodna lokalna i substancjalna

## Pochodna lokalna

Ad 1. Zmianę  $\varphi$  w ustalonym punkcie przestrzeni  $\mathbf{r}$  opisuje pochodna lokalna wielkości  $\varphi$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (41)$$

## Pochodna materialna

Ad 2.  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  – wartość w chwili  $t$  w punkcie  $\mathbf{r}$ .

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t, t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (42)$$

# Pochodna lokalna i substancjalna

## Pochodna materialna

Po rozwinięciu w szereg i odrzuceniu wyrazów wyższego rzędu

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\mathbf{v} \text{ grad})\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (43)$$

## Wnioski

- 1 Prędkość  $\mathbf{v}$  jest pochodną lokalną wektora przesunięcia względem czasu (por. (39)):

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t}.$$

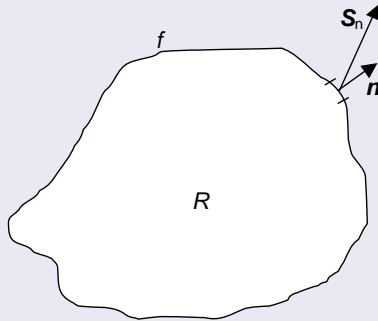
- 2 Przyspieszenie  $\mathbf{a}$  jest pochodną substancjalną wektora prędkości  $\mathbf{v}(r, t)$  względem czasu (por. (40)):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$



# Dynamika ośrodków ciągłych

## Wektor napięcia



Rys. 5: Wektor napięcia

# Dynamika ośrodków ciągłych

## Wektor napięcia

Wektor napięcia  $\mathbf{S}_n df$  – opisuje wzajemne oddziaływanie dwu części ośrodka ciągłego rozdzielonych myślowo dowolną powierzchnią; stanowi on siłę powierzchniową, z jaką część elementu  $df$ , wskazanej przez wektor normalny  $\mathbf{n}$ , działa na część ciała znajdującą się po przeciwnej stronie  $df$ . Charakter tego oddziaływania, niezależnie od właściwości stykających się materiałów, jest taki sam.

Wymiar napięcia:  $\frac{[\text{siła}]}{[\text{cm}]^2}$

Wymiar siły: ?????????

# Dynamika ośrodków ciągłych

## Twierdzenie Gaussa

$$\int_R \operatorname{div} T dv = \int_S T n df . \quad (44)$$

## Wektor napięcia

Wektor napięcia można zapisać tensorowo:

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S} \mathbf{n} . \quad (45)$$

gdzie

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{vmatrix} \quad (46)$$

## Dynamika ośrodków ciągłych

$$\int_F \mathbf{S}_n df = \int_F \mathbf{S} n df = \int_R \operatorname{div} \mathbf{S} d\tau. \quad (47)$$

### Równanie ruchu

$$\int_R \rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \int_R \rho_m \mathbf{F} d\tau + \int_F \mathbf{S}_n df, \quad (48)$$

$\rho_m$  – gęstość masy ośrodka;  $\mathbf{F}$  – siła zewnętrzna działająca na jednostkę masy, siła masowa;  $\mathbf{S}_n$  – napięcie powierzchniowe.

$$\int_R \left( \rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho_m \mathbf{F} - \operatorname{div} \mathbf{S} \right) d\tau = 0. \quad (49)$$

# Dynamika ośrodków ciągłych

## Równanie ruchu

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_m \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (50)$$

# Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Podstawowe równania MOC
  - Odształcenie
  - Deformacja
- 3 Kinematyka ośrodków ciągłych
- 4 Pochodna lokalna i substancjalna
- 5 Dynamika ośrodków ciągłych
  - Ciało sprężyste

## Ciało sprężyste

### Ciało idealnie sprężyste

to takie, dla którego napięcia  $S_{\mu\nu}$  są jednoznacznymi funkcjami odkształceń  $\varepsilon_{mn}$ :

$$S_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(\varepsilon_{mn}). \quad (51)$$

Można pokazać, że tensor napięć  $S_{\mu\nu}$  jest symetryczny, co można zapisać

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (52)$$

# Ciało sprężyste

## Prawo Hooke'a

Robert Hooke ogłosił swe prawo w roku 1676 w postaci anagramu:

**ceiinossttvu**

co oznacza **ut tensio sic vis**

co oznacza **jakie rozciąganie, taka siła**



# Ciało sprężyste

## Ciało idealnie sprężyste

Rozwijamy wyrażenie (53) w szereg, pomijamy wyrazy wyższego rzędu, otrzymujemy uogólnione prawo ruchu: składowe tensora napięć są funkcjami liniowymi składowych tensora odkształceń w każdym punkcie ciała sprężystego:  $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl}$ . Np. (gdy nie ma napięć wstępnych, wtedy wielkości stałe znikają):

$$\sigma_x = c_{11}\epsilon_x + c_{12}\epsilon_y + c_{13}\epsilon_z + c_{14}2\gamma_x + c_{15}2\gamma_y + c_{16}2\gamma_z \quad (53)$$

$$\tau_x = c_{41}\epsilon_x + c_{42}\epsilon_y + c_{43}\epsilon_z + c_{44}2\gamma_x + c_{45}2\gamma_y + c_{46}2\gamma_z \quad (54)$$

# Ciało sprężyste

## Energia

Podczas odkształcenia ośrodka siły zewnętrzne masowe i powierzchniowe wykonują na ogół pewną pracę, która częściowo jest zmieniana na energię kinetyczną, a częściowo na energię potencjalną. Mamy więc

$$\delta U + \delta E_k = \delta A + \delta Q, \quad (55)$$

$\delta U$  – przyrost energii potencjalnej;  $\delta E_k$  – przyrost energii kinetycznej;  $\delta Q$  – dostarczone ciepło;  $\delta A = \delta A_S + \delta A_P$ :  $A_P$  – praca wykonana przez siły masowe,  $A_S$  – praca wykonana przez siły powierzchniowe.

Gdy ciepło nie jest dostarczane, to  $\delta V$  jest różniczką zupełną (wniosek z rozważań termodynamicznych)

# Ciało sprężyste

## Redukcja stałych sprężystości

W ogólności liczba stałych sprężystości wynosi **81**. Jeśli nie ma napięć początkowych i  $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ , liczba stałych redukuje się do **21**.

## Ciało izotropowe

to takie, dla których potencjał sprężysty nie zależy od zmiany układu współrzędnych, czyli da się wyrazić przez niezmienniki.

# Ciało sprężyste

## Ciało izotropowe – niezmienniki

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad (56)$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_z \\ \gamma_z & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_x & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \gamma_y \\ \gamma_y & \varepsilon_x \end{vmatrix} \quad (57)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (58)$$

# Ciało sprężyste

## Ciało izotropowe – niezmienniki

Ciało sprężyste izotropowe bez napięć początkowych

$$v(J_1, J_2) = AJ_1^2 + BJ_2 > 0 \quad (59)$$

(tylko dwie stałe sprężystości,  $J_3$  nie ma, bo trzeciego rzędu).

Ciało sprężyste izotropowe z napięciami początkowymi

$$v(J_1, J_2) = -PJ_1 + AJ_1^2 + BJ_2 > 0 \quad (60)$$

$A = 0, B = 0$  napięcia tworzą tensor kulisto-symetryczny, czyli jednakowy w każdym kierunku. Taka sytuacja zachodzi w cieczech:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P, \\ \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Koniec? :-)

Koniec wykładu 7