

Fizyka dla Informatyków
Wykład 6

DRGANIA I FALE

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

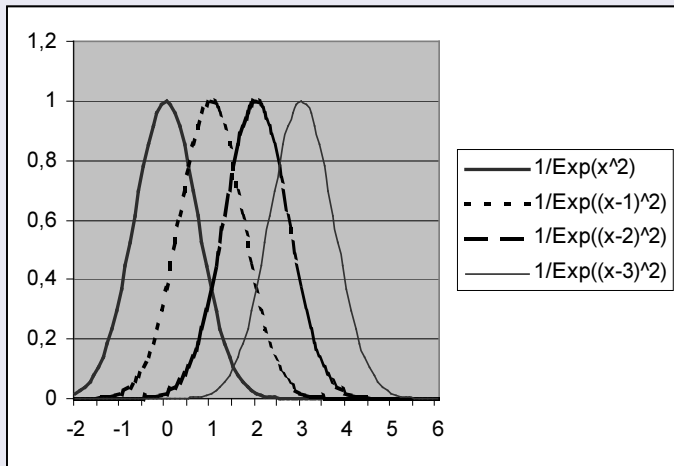
Fale są wszędzie. I jest ich bardzo dużo w różnych formach. Mamy fale płaskie i kuliste. Mamy fale objętościowe i powierzchniowe. Mamy fale morskie i fale dźwiękowe. Fale powstające w wyniku pomachania ręką, fale kibiców na trybunach ...

Należy odróżnić falę od sygnału:

- **Fala:** zaburzenie ośrodka przemieszczające się z określoną prędkością w określonym kierunku. W przypadku fal elektromagnetycznych – to zaburzenie pola.
- **Sygnał:** mierzalne (zmienne w czasie) zakłócenie ośrodka.



Rys. 1: Fala przybojowa, pojawiająca się tylko na płytkiej wodzie (czemu takich fal nie ma na wodach głębokich?)



Rys. 2: Intuicyjna definicja fali: zakłócenie przemieszczające się przez ośrodek

Fala: dowolny mierzalny sygnał, przemieszczający się z jednej części ośrodka do innej z określoną prędkością propagacji

Spis treści

1 Wstęp

2 Matematyczna reprezentacja fal

- Reprezentacja fal jednowymiarowych
- Fale biegnące i stojące
- Front fali i impuls
- Ciąg impulsów i dyspersja

3 Równanie Kortewega-deVriesa KdV

4 Drgania a równanie falowe

- Ogólne rozwiązanie równania falowego
- Rozwiązanie d'Alemberta równania falowego

Będziemy rozważać fale w drgających strunach, długich cienkich rurach, drogach jednopasmowych . . . , czyli fale propagujące się wzdłuż określonych linii.

Jednowymiarowa fala reprezentowana jest przez funkcję u dwu zmiennych – położenie x i czas t , czyli:

$$u = u(x,t)$$

Dynamika i kinematyka fal opisywane są równaniami różniczkowymi cząstkowymi (układami równań)

Partial Differential Equations

gdyż funkcja $u(x, t)$ zależy od wielu zmiennych.

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots$$

Poniżej przytoczymy kilka przykładów równań, których rozwiązania można interpretować jako fale.

Przykład 1. Równanie transportu

$$u_t + c u_x = 0.$$

opisuje np. rozlewanie się zanieczyszczenia w szybkim strumieniu cieczy, tu $u(x, t)$ reprezentuje koncentrację zanieczyszczenia. W punkcie x , zanim zanieczyszczenie do niego dotrze $u = 0$, jak dotrze to jest jakieś tam, a po chwili znów znika.

Przykład 2. Równanie dyfuzji, równanie przewodnictwa (ciepła, prądu elektrycznego)

$$u_t = D u_{xx}.$$

Przykład 3. Zlinearyzowane równanie Burgersa

$$u_t + c u_x = D u_{xx} ,$$

to kombinacja równania transportu i równania dyfuzji.

Przykład 4. Nieliniowe równanie Burgersa

$$u_t + u u_x = D u_{xx} ,$$

podstawowe równanie mechaniki cieczy, będące kombinacją różnych procesów transportu i dyfuzji. Dla $D = 0$ staje się **nielepkiem równaniem Burgersa**

$$u_t + u u_x = 0 ,$$

jest klasycznym przypadkiem fal uderzeniowych.

Przykład 5. Równanie drgającej struny gitarowej – równanie falowe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} .$$

Powyższa nazwa wcale nie oznacza, że jest to jedyne równanie opisujące ruch falowy.

Przykład 6. Równanie Kortewega-deVriesa

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0 ,$$

zostało otrzymane w roku 1895 przez Kortewega i deVriesa modelujących fale na powierzchni płytkiej wody. Szczególnym zainteresowaniem cieszą się pewne rozwiązania tego równania zwane **solitonami**.

Spis treści

1 Wstęp

2 Matematyczna reprezentacja fal

- Reprezentacja fal jednowymiarowych
- Fale biegnące i stojące
- Front fali i impuls
- Ciąg impulsów i dyspersja

3 Równanie Kortewega-deVriesa KdV

4 Drgania a równanie falowe

- Ogólne rozwiązanie równania falowego
- Rozwiązanie d'Alemberta równania falowego

Funkcja reprezentująca falę biegnącą ma postać

$$u(x, t) = f(x - c t), \quad (1)$$

f – funkcja jednej zmiennej, c – niezerowa stała.

Jeśli $c > 0$ – fala przemieszcza się z prędkością c w kierunku zgodnym z układem współrzędnych; dla $c < 0$ – przeciwnie.

Przykład 7. Znaleźć rozwiązanie równania falowego

$$u_{tt} = a u_{xx}, \quad \text{stała } a > 0,$$

w postaci fali biegnącej.

Zakładamy rozwiązanie w postaci $u(x, t) = f(x - c t)$ i różniczkujemy

$$u_t(x, t) = [f'(x - c t)](x - c t)_t = -c f'(x - c t),$$

$$u_x(x, t) = [f'(x - c t)](x - c t)_x = f'(x - c t).$$

Różniczkujemy drugi raz

$$u_{tt}(x, t) = [-c f''(x - c t)](x - c t)_t = c^2 f''(x - c t),$$

$$u_{xx}(x, t) = [-c f''(x - c t)](x - c t)_x = f''(x - c t).$$

Podstawiamy do równania falowego i otrzymujemy

$$c^2 f''(x - c t) = a f''(x - c t).$$

Kładąc $z = (x - c t)$ mamy

$$(c^2 - a) f''(z) = 0,$$

dla wszystkich z . Musimy rozpatrzyć dwa przypadki: $c^2 = a$ i $c^2 \neq a$

- jeśli $c^2 = a$

$$u(x, t) = f(x - \sqrt{a} t), \quad u(x, t) = f(x + \sqrt{a} t).$$

Przykłady rozwiązań:

$$u(x, t) = \sin(x - \sqrt{a} t),$$

$$u(x, t) = (x + \sqrt{a} t)^4,$$

$$u(x, t) = e^{-(x - \sqrt{a} t)^2};$$

- jeśli $f'' = 0$

$$f(z) = A + Bz,$$

$B \neq 0$ by profil f nie był stały.

Spis treści

1 Wstęp

2 Matematyczna reprezentacja fal

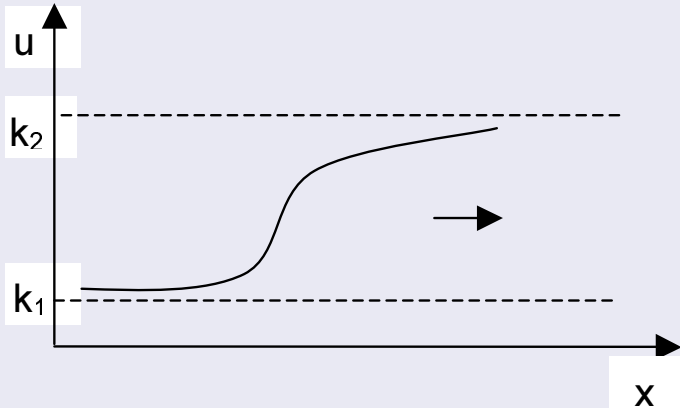
- Reprezentacja fal jednowymiarowych
- Fale biegnące i stojące
- Front fali i impuls
- Ciąg impulsów i dyspersja

3 Równanie Kortewega-deVriesa KdV

4 Drgania a równanie falowe

- Ogólne rozwiązanie równania falowego
- Rozwiązanie d'Alemberta równania falowego

Front fali, to np. gwałtowna zmiana pogody.



Rys. 3: Profil fali w chwili t

Fala biegnąca postaci $u(x, t)$ jest **frontem fali**, jeśli dla dowolnej chwili t

$$u(x, t) \longrightarrow k_1, \text{ gdy } x \longrightarrow -\infty,$$

$$u(x, t) \longrightarrow k_2, \text{ gdy } x \longrightarrow \infty,$$

dla pewnych stałych k_1 i k_2 .

W przypadku, gdy $k_1 = k_2$ front fali nazywamy **impulsem**.

Spis treści

1 Wstęp

2 Matematyczna reprezentacja fal

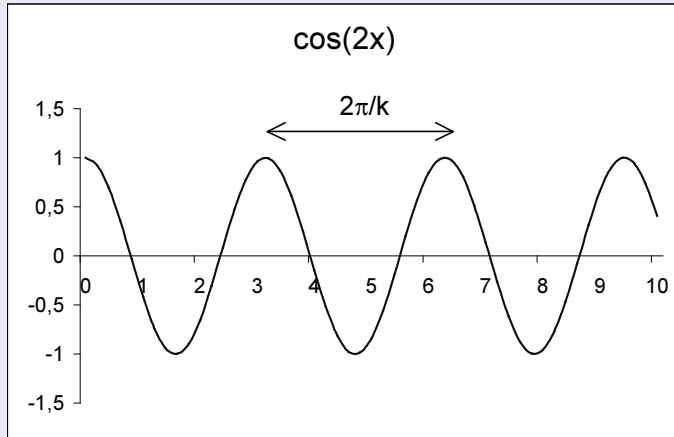
- Reprezentacja fal jednowymiarowych
- Fale biegnące i stojące
- Front fali i impuls
- **Ciąg impulsów i dyspersja**

3 Równanie Kortewega-deVriesa KdV

4 Drgania a równanie falowe

- Ogólne rozwiązanie równania falowego
- Rozwiązanie d'Alemberta równania falowego

Fala biegnąca typu $u(x, t) = \cos(2x + 6t)$ nie jest frontem fali ani impulsem, ale przykładem innego typu fali.



Rys. 4: Jeden cykl ciągu impulsów

Fala biegnąca, którą można zapisać jako

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad \text{lub} \quad u(x, t) = A \cos(kx + \omega t),$$

$A \neq 0$, $k > 0$ i $\omega > 0$ – stałe, nazywana jest **ciągim impulsów**.
Jeśli przepisujemy powyższe w postaci

$$u(x, t) = A \cos \left[k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \right],$$

to widać, że jest to

- fala biegnąca, czyli o postaci $u(x, t) = f(kx - \omega t)$;
- o profilu $f(z) = A \cos(kz)$;
- przemieszczająca się z prędkością $c = \omega/k$ (patrz rysunek 4);
- $f(z)$ jest funkcja periodyczną.

k – **liczba falowa**, określająca liczbę cykli w okienku o długości 2π ;

ω – **częstotliwość kołowa**, określająca liczbę cykli fali przechodzących przez określony punkt x w ciągu przedziału czasu 2π .

Nie wszystkie k i ω są dopuszczalne. Aby określić które są, wstawiamy rozwiązanie do równania i znajdujemy związek

$$\omega = \omega(k),$$

zwany **związkiem dyspersyjnym, dyspersją**.

Przykład 8. Równanie Kleina-Gordona

$$u_{tt} = a u_{xx} - b u, \quad (2)$$

a, b – stałe, > 0 ,

modeluje poprzeczne drgania struny z liniową siłą wymuszającą.

Ciąg impulsów jest rozwiązaniem tego równania, jeśli

$$-\omega^2 A \cos(kx - \omega t) = a[-k^2 A \cos(kx - \omega t)] - b A \cos(kx - \omega t), \quad (3)$$

lub

$$A(\omega^2 - ak^2 - b) \cos(kx - \omega t) = 0. \quad (4)$$

Nasz związek dyspersyjny ma postać $\omega^2 = ak^2 + b$, czyli $\omega = \sqrt{ak^2 + b}$, i wtedy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cos \left(kx - \sqrt{ak^2 + b} t \right) \\ &= A \cos \left[k \left(x - \sqrt{\frac{ak^2 + b}{k^2}} t \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

przemieszcza się z prędkością

$$c = \sqrt{\frac{ak^2 + b}{k^2}} = \sqrt{a + \frac{b}{k^2}} = \sqrt{a + \frac{ab}{\omega^2 - b}}, \quad (6)$$

czyli ciąg impulsów o większej częstotliwości przemieszcza się z mniejszą prędkością. **Równanie Kleina-Gordona jest dyspersyjne.**

Przykład 9. Równanie transportu

$$u_t + a u_x = 0. \quad (7)$$

Ciąg impulsów jest rozwiązaniem tego równania, jeśli

$$\omega A \sin(kx - \omega t) + a[-kA \sin(kx - \omega t)] = 0, \quad (8)$$

lub

$$A(\omega - a k) \sin(kx - \omega t) = 0, \quad (9)$$

czyli związek dyspersyjny ma postać $\omega = a k$.

Dla każdej liczby falowej, ciąg impulsów przemieszcza się w kierunku dodatnim ze stałą prędkością $c = a$. **Równanie transportu nie jest dyspersyjne.**

Obserwowałem łódź ciągnioną przez parę koni w wąskim kanale. Nagle łódź się zatrzymała – ale nie masa wody w kanale, która kontynuowała swój ruch, poruszając się do przodu z dużą prędkością, zachowując swą formę dużego, gładko zaokrąglonego pojedynczego wału wody i swą prędkość. Śledziłem ją z konia jak poruszała się z prędkością osiem lub dziewięć mili na godzinę, wciąż zachowując swą początkową postać około trzydziestu stóp długości i półtorej stopy wysokości. Jej wysokość stopniowo malała i po pokonaniu jednej lub dwu mili przestałem ją widzieć.

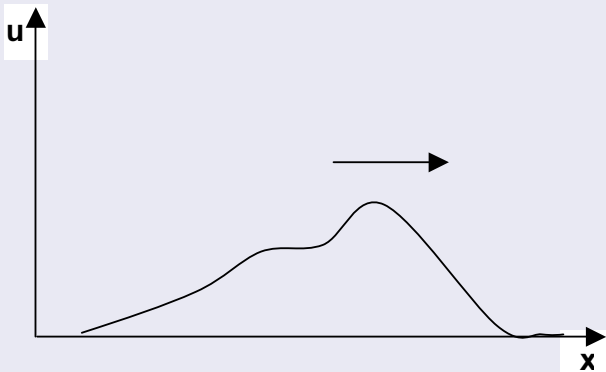
J.S. Russel, 1844

Eksperymenty i obserwacje Russela przyciągnęły uwagę naukowców (Boussinesq, Rayleigh, Stokes). W roku 1895 Korteweg i de Vries otrzymali równanie modelujące wysokość powierzchni płytkiej wody w obecności długich fal grawitacyjnych. Dla tych fal, długość fali jest duża w porównaniu z głębokością wody.

$$U_t + (a_1 + a_2 U)U_x + a_3 U_{xxx} = 0, \quad a_2, a_3 \neq 0, \quad (10)$$

jest nieliniowym równaniem trzeciego rzędu. Podstawienie $u = a_1 + a_2 U$ i przeskalowanie zmiennych niezależnych x i t daje

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0. \quad (11)$$



Rys. 5: Profil impulsu, dla którego $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ i $u_{xxx}(x, t)$ zdużają do 0, gdy $x \rightarrow \pm\infty$.

Poszukujemy rozwiązania $u(x, t) = f(x - ct)$ w postaci impulsu, z $c > 0$ i z $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ i $u_{xxx}(x, t)$ zbieżnymi do 0, gdy $x \rightarrow \pm\infty$ (patrz Rys. 5). Podstawiamy i

$$-cf' + ff' + f''' = 0. \quad (12)$$

Całkujemy raz

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = a, \quad (13)$$

a – stała całkowania.

Z warunku znikania $f(z)$ i $f''(z)$ dla $z \rightarrow \pm\infty$, a musi zniknąć.

Mnożymy przez f' i całkujemy ponownie

$$-\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = b. \quad (14)$$

Z warunku znikania w nieskończoności $b = 0$.

Rozwiązujemy względem $(f')^2$

$$3(f')^2 = (3c - f)f^2. \quad (15)$$

Podstawiamy: $g^2 = 3c - f$; skąd mamy: $f = 3c - g^2$, $f' = -2gg'$.

$$\frac{2\sqrt{3}}{3c - g^2} g' = -1. \quad (16)$$

Rozkładamy na ułamki proste i całkujemy obustronnie względem z :

$$\ln \left(\frac{\sqrt{3c} + g}{\sqrt{3c} - g} \right) = -\sqrt{c} z + d, \quad (17)$$

d – stała całkowania. Rozwiązujemy względem g

$$g(z) = \sqrt{3c} \frac{\exp(-\sqrt{c} z + d) - 1}{\exp(-\sqrt{c} z + d) + 1} = -\sqrt{3c} \operatorname{tgh} \left[\frac{1}{2}(\sqrt{c} z - d) \right], \quad (18)$$

Wracając do starych oznaczeń

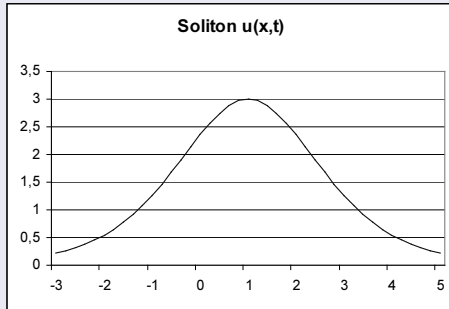
$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c} z - d)\right]. \quad (19)$$

Przypomnienie:

$$\operatorname{sech}(z) = 1/\cosh(z), \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

d nie wpływa na rozwiązanie (to tylko zwykła przesunięcie argumentu), więc kładziemy $d = 0$,

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct) \right].$$



Rys. 6: Profil rozwiązania równania KdV (soliton)

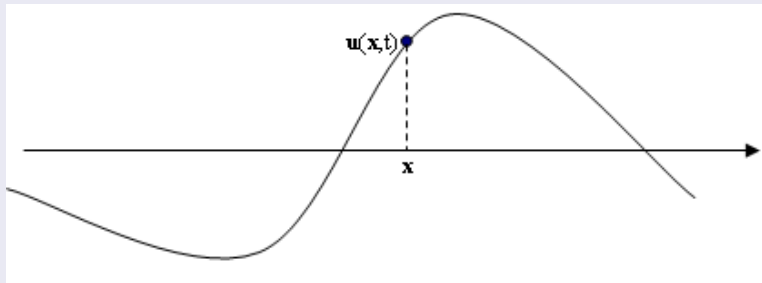
Russel stwierdził, że zaobserwowane przez niego fale na wodzie poruszają się tym szybciej im są wyższe. Ten fakt jest również odtworzony przez nasze rozwiązanie, gdzie amplituda fali wynosi $3c$.

Równanie falowe

Równanie falowe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} , \quad (20)$$

modeluje drgania napiętej struny (np. w gitarze).

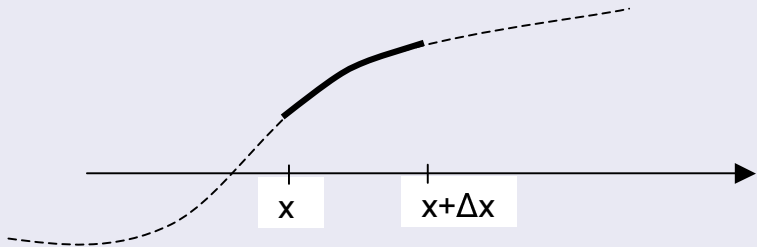


Rys. 7: Przeszyczenie struny $u(x, t)$ w chwili t w położeniu x

$u(x, t)$ – miara przeszczenia struny w położeniu x w chwili t ; $u_t(x, t)$ – pionowa prędkość punktu x na strunie w chwili t ; $u_{tt}(x, t)$ – pionowe przyspieszenie punktu x na strunie w chwili t ; $u_x(x, t)$ – miara nachylenia struny w punkcie x .

Sposób drgań zależy od materiału z którego zrobiono strunę i od siły na nią działającej. Robimy następujące założenia:

- jednorodność struny: gęstość masy na jednostkę długości ρ jest stała;
- drgania płaskie: struna pozostaje w swej płaszczyźnie drgań;
- jednorodne napięcie: każdy fragment struny wywiera na sąsiednie segmenty taką samą siłę T ; kierunek tej siły zmienia, gdyż jest zawsze styczny do struny;
- brak innych sił;
- małe drgania: nachylenie u_x zawsze jest niewielkie.



Rys. 8: Fragment struny S

Wyprowadzenie równania falowego

Niech S będzie odcinkiem struny leżącym między punktami x a $x + \Delta x$, gdzie $\Delta x > 0$ jest małe (Rys. 8). Równanie falowe jest wnioskiem z drugiego prawa Newtona, które mówi, że

$$(\text{Masa } S) \cdot (\text{Przyspieszenie } S) = \text{Siła całkowita działająca na } S, \quad (21)$$

gdzie przyspieszenie i siła działają w kierunku prostopadłym do S .

Masa odcinka struny S :

$$\text{Masa } S = \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (u_x(s, t))^2} ds. \quad (22)$$

dla małych wychyleń $|u_x| \ll 1$, więc

$$\text{Masa } S = \rho \int_x^{x+\Delta x} 1 ds = \rho \Delta x. \quad (23)$$

Przyspieszenie odcinka struny S :

$$u_{tt}(x, t) \quad (24)$$

Siła działająca na odcinka struny S : wektor styczny w punkcie x do struny ma współrzędne $-(1, u_x(x, t))$, czyli siła rozciągająca T działająca na lewy koniec segmentu wynosi:

$$-T \frac{(1, u_x(x, t))}{\sqrt{1 + (u_x(s, t))^2}}, \quad (25)$$

Korzystamy jeszcze raz z założenia o małych amplitudach

$$\sqrt{1 + (u_x(s, t))^2} \approx 1,$$

i wtedy pionowa składowa siły jest równa

$$-T u_x(x, t).$$

Powtarzamy rozumowanie dla prawego końca segmentu

$$T u_x(x + \Delta x, t).$$

czyli siła całkowita F_c na S wynosi

$$F_c = T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t). \quad (26)$$

Podstawiamy powyższe wyniki do równania (21)

$$(\rho \Delta x) u_{tt}(x, t) = T u_x(x + \Delta x, t) - T u_x(x, t). \quad (27)$$

Dzielimy przez Δx

$$\rho u_{tt}(x, t) = T \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x},$$

co w granicy $\Delta x \rightarrow 0$ daje

$$\rho u_{tt}(x, t) = T u_{xx}(x, t).$$

Kładąc $c = \sqrt{T/\rho}$ otrzymujemy tradycyjną postać równania falowego

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t). \quad (28)$$

Równanie przyjmuje bardziej skomplikowaną postać, jeśli uwzględnimy jeszcze inne siły, np.

$$\rho u_{tt} = T u_{xx} - F u_t - R u + f(x, t).$$

- $-F u_t$ – siła tarcia (const. = $F > 0$);
- $-R u$ – liniowa siła zwrotna (const. = $R > 0$);
- $+f(x, t)$ – siła zewnętrzna (np. grawitacja).

Rozwiązania równania falowego

Rozwiązaniami równania falowego są fale biegnące

$$u(x, t) = f(x - c t), \quad u(x, t) = f(x + c t),$$

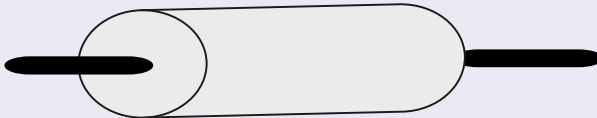
gdzie c jest prędkością propagacji fali. Ponieważ

$$c = \sqrt{T/\rho},$$

to prędkość fali możemy:

- zwiększać, zwiększając napięcie struny T ,
- zmniejszać, dobierając materiał o większej gęstości masy.

Klasyczne równanie falowe jest jednym z wielu równań posiadającym rozwiązania w postaci fal. To równanie opisuje drgania struny, długiej smukłej belki, prądu i napięcia w elektrycznej linii przesyłowej.



Rys. 9: Ekranowana linia przesyłowa

$i(x, t)$ – prąd elektryczny; $v(x, t)$ – napięcie prądu elektrycznego.

Równanie linii transmisyjnej ma postać

$$i_x + C v_t + G v = 0 ,$$

$$v_x + L i_t + R i = 0 ,$$

gdzie C – pojemność elektryczna na jednostkę długości kabla; G – upływ (wyciekanie) na jednostkę długości; R – oporność elektryczna na jednostkę długości kabla; L – indukcyjność elektryczna na jednostkę długości kabla.

Eliminujemy v (pierwsze równanie różniczkujemy wzgl. x , a drugie względem t i eliminujemy człony v_{xt} i v_{tx} , a następnie jeszcze raz używamy równanie drugie do eliminacji v_x). W wyniku dostajemy

$$i_{xx} = (CL) i_{tt} + (CR + GL) i_t + (GR) i .$$

Podobnie możemy wyeliminować i . Jeśli $R = G = 0$, to otrzymujemy znane równania falowe

$$i_{tt} = c^2 i_{xx} , \quad v_{tt} = c^2 v_{xx} ,$$

gdzie $c = \sqrt{1/(CL)}$.

Pokażemy, że rozwiązanie równania falowego $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ jest sumą dwu fal biegnących, jednej w prawo, a drugiej w lewo

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Zagadnienie początkowe:

- cząstkowe równanie różniczkowe

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

- warunki początkowe

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

może być sformułowane następująco:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Wiemy już, że rozwiązaniami są dwie fale biegnące: $h(x - ct)$ i $h(x + ct)$. Robimy zamianę zmiennych:

$$\xi(x, t) = x - ct, \quad \eta(x, t) = x + ct,$$

są to współrzędne „śledzące” fale biegnące z lewej i z prawej strony. W tym nowym układzie współrzędnych rozwiązanie buduje się łatwiej. Z definicji

$$u(x, t) = U(\xi(x, t), \eta(x, t)).$$

Różniczkujemy

$$\begin{aligned}u_t &= U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -cU_\xi + cU_\eta, \\u_{tt} &= -c(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\xi\eta}\eta_t) + c(U_{\eta\xi}\xi_t + U_{\eta\eta}\eta_t) \\&= -c(-cU_{\xi\xi} + cU_{\xi\eta}) + c(-cU_{\eta\xi} + cU_{\eta\eta}) \\&= c^2 U_{\xi\xi} - 2c^2 U_{\xi\eta} + c^2 U_{\eta\eta}, \\u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta, \\u_{xx} &= (U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\xi\eta}\eta_x) + (U_{\eta\xi}\xi_x + U_{\eta\eta}\eta_x) \\&= (U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}) + (U_{\eta\xi} + U_{\eta\eta}) \\&= U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.\end{aligned}\tag{29}$$

Po podstawieniu, dostajemy

$$U_{\xi\eta} = 0.$$

Całkujemy względem η ($U_{\xi\eta}$ od η nie zależy)

$$U_{\xi} = \phi(\xi).$$

Całkujemy względem ξ

$$U(\xi, \eta) = \int \phi(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Wracając do starych zmiennych

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

(30)

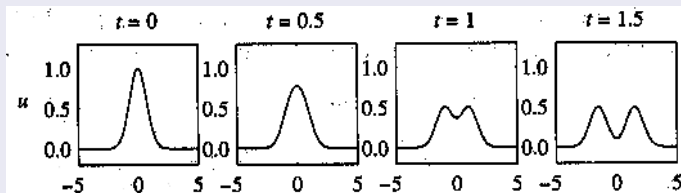
Przykłady rozwiązań równania falowego:

$$u(x, t) = e^{x-ct},$$

$$u(x, t) = \sin(x + ct),$$

$$u(x, t) = (x + ct)^2 + e^{-(x-ct)^2}.$$

Dwa pierwsze równania reprezentują fale biegnące w lewo i w prawo. Trzecie równanie jest kombinacją fal w lewo i w prawo.



Rys. 10: Profile rozwiązania równania falowego z profilem początkowym

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

Robimy następujące założenia: położenie początkowe $u(x, 0)$ i początkowa prędkość $u_t(x, 0)$ są dane dla wszystkich x (np. niech będą równe 0). Jeśli w chwili początkowej potrącimy strunę, to w chwili początkowej będzie ona miała profil $u(x, 0) = f(x)$ i prędkość $u_t(x, 0) = 0$.

Rozwiążemy teraz następujące zadanie:

$$\text{PDE: } u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$\text{IC: } u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x).$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci ogólnej:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).$$

Wstawiamy warunki początkowe na położenie

$$F(x) + G(x) = f(x). \quad (31)$$

i na prędkość

$$-c F'(x) + c G'(x) = g(x). \quad (32)$$

Dzielimy powyższe przez c i całkujemy od 0 do x

$$-F(x) + G(x) = -F(0) + G(0) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s) ds. \quad (33)$$

Równania (31) i (33) tworzą układ równań liniowych na $F(x)$ i $G(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}(-F(0) + g(0) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds),$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}(-F(0) + g(0) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds),$$

Rozwiązanie będzie więc mieć postać:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) =$$

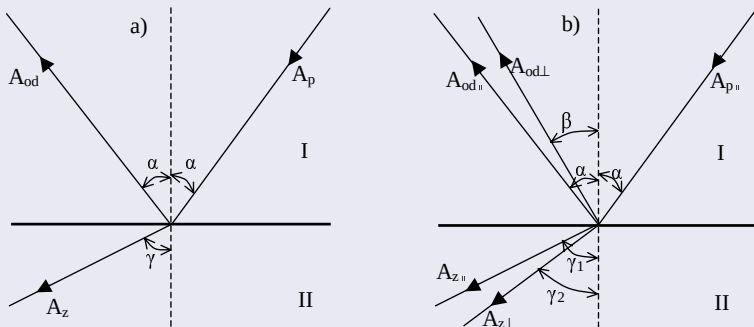
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2}(-F(0) + G(0)) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s)ds \\ & + \frac{1}{2}f(x + ct) - \frac{1}{2}(-F(0) + G(0)) - \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s)ds \\ & = \frac{1}{2}f(x - ct) + \frac{1}{2}f(x + t) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy **rozwiązanie d'Alemberta**

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (34)$$

równania falowego. Jest to rzadki przypadek rozwiązania w jawnej postaci.

Prawa załamania i odbicia fal od powierzchni są powszechnie znane: kąt odbicia fali jest równy kątowi padania, a kąt załamania zależy od rodzaju materiałów, w których fala się propaguje. Przypomnijmy, że dla pewnych materiałów i dla określonego krytycznego kąta padania może pojawić się fala powierzchniowa, a dla kątów większych od tego kąta krytycznego może nastąpić całkowite wewnętrzne odbicie. Tu na zakończenie, chcemy zwrócić uwagę na jeszcze jedną okoliczność. Fala może być spolaryzowana poprzecznie lub podłużnie, czyli drgania mogą odbywać albo w kierunku propagacji fali, albo w płaszczyźnie do tego kierunku prostopadłej. Prędkości tych fal są na ogół różne (istnieją pewne wyróżnione kierunki, tzw. osie optyczne lub akustyczne, w których te prędkości są równe), więc w wyniku odbicia następuje rozszczepienie tych fal (patrz Rys. 11). Fala biegnąca jest na ogół mieszaniną wszystkich swych fal cząstkowych.



Rys. 11: Odbicie i załamanie fal w ośrodku falowym (a), i sprężystym (b)

Koniec wykładu 6