

Fizyka dla Informatyków

Wykład 5

GRAWITACJA

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megaloty
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megaloty
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megaloty
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megaloty
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megaloty
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Obrazy Nieba: 1



Rys. 1: Chmurka

Obrazy Nieba: 2



Rys. 2: Kapelusik

Obrazy Nieba: 3



Rys. 3: Wirówka

Obrazy Nieba: 4



Rys. 4: Oko Kosmosu

Obrazy Nieba: 5



Rys. 5: Planety widziane z Księżyca

Obrazy Nieba: 6



Rys. 6: Wschód Ziemi na Księżycu

Spis treści

- 1 Grawitacja
 - Obrazy Nieba
 - Astronomia: nieco historii i megality
- 2 Prawa Keplera
- 3 Prawo ciążenia
- 4 Prędkość kosmiczna

Astronomia

Inne wspaniałe obrazy Nieba: <http://hubblesite.org/>

Astronomia jest najstarszą nauką przyrodniczą

[gr. astron = gwiazda + nómos = prawo]

Jej początki, związane z potrzebami praktycznymi, przede wszystkim z rachubą czasu i powstaniem kalendarza, sięgają zamierzchłych czasów. Istnieją pewne przesłanki, że pierwsze obserwacje Księżyca prowadzono już w epoce magdaleńskiej, ok. 30 000 lat p.n.e. Długość roku obliczono dość dokładnie już na początku trzeciego tysiąclecia p.n.e., w epoce wznoszenia w Egipcie piramid. W tym samym czasie powstały w Europie obserwatoria megalityczne (np. w Stonehenge w Anglii i Carnac we Francji). Był to okres astronomii horyzontalnej. Z ustalonego miejsca obserwacji notowano punkty wschodu i zachodu na horyzoncie Słońca, Księżyca i innych jasnych ciał niebieskich w określonych dniach, np. w najdłuższym i najkrótszym dniu roku. Kierunki wskazujące te punkty zaznaczano, ustawiając rzędy kamieni.

Merhiry w Stonehenge



Rys. 7: Megality w Stonehenge, Walia

Merhiry w Carnac



Rys. 8: Kamienne posągi w Carnac, Bretania - Francja

Oto największe na świecie skupisko megalitów. Około 4000-5000 różnej wielkości menhirów rozrzuconych jest na obszarze ponad 4 km na północ od niewielkiej miejscowości Carnac we Francji. To najważniejszy zabytek prehistoryczny w Europie, dużo starszy niż piramidy w Egipcie czy słynny Stonehenge w Wielkiej Brytanii. Istnieje kilka teorii dotyczących powodów wybudowania tych konstrukcji. Po pierwsze przypuszcza się, że było to prehistoryczne obserwatorium astronomiczne. Druga teoria dopatruje się w tym zwykłego cmentarzyska. Inni twierdzą, że kamienne posągi to zaklęci żołnierze mający skutecznie odstraszać intruzów i zapewniać miejscowej ludności spokój.

Wiele menhirów zniszczono w minionych wiekach. Chłopi, którym kamienie przeszkadzały w pracach polowych, wywracali posągi. Część padła ofiarą "obrońców" wiary chrześcijańskiej, którzy kamienne megality przekuli na pomniki świętych i krzyże. Na szczęście zostało jeszcze bardzo wiele innych kamieni...

Pitagorejczycy

Pitagoras z Samos (ok. 530 p.n.e.) osiedlił się w Krotonie, kolonii greckiej w południowej Italii. Założył tam związek o charakterze religijnym, który stał się także ośrodkiem badań naukowych. Pitagoras, jego uczniowie i naśladowcy uczynili wielki krok w kierunku matematyzacji nauki, zwracając po raz pierwszy uwagę na ilościową stronę zagadnień.

Naczelną ideą w filozofii pitagorejskiej było, że liczby nie tylko reprezentują relacje między zjawiskami, ale są substancją rzeczy, przyczyną każdego zjawiska w przyrodzie. O ile więc filozofowie jońscy kładli nacisk na substancję Wszechświata, o tyle pitagorejczycy podkreślali jego formę i proporcję. W wyniku badań geometrycznych odkryto twierdzenie o sumie kątów w trójkącie i twierdzenie noszące imię Pitagorasa. Liczbę 10, będącą sumą pierwszych czterech liczb całkowitych, pitagorejczycy uznawali za liczbę doskonałą i przypisywali jej szczególne znaczenie. Pitagorejczycy zajmowali się także muzyką. Tradycja przypisuje samemu Pitagorasowi odkrycie związku harmonii z liczbami. Dźwięki harmoniczne odpowiadają najprostszemu stosunkowi liczbowym długości strun, stosunek $1 : 2$ daje oktawę, stosunek $3 : 4$ – kwintę, a $2 : 3$ – kwartę. To doniosłe odkrycie stanowiło dla pitagorejczyków dowód, że związki między różnymi zjawiskami przyrodniczymi mogą być wyrażane tylko matematycznie.

Pitagorejczycy

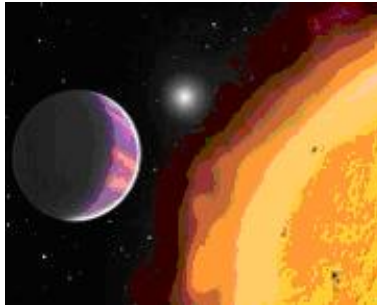
Pitagorejczycy uważali, że matematyka dzieli się na cztery części:

- 1 geometrię,
- 2 arytmetykę,
- 3 astronomię,
- 4 muzykę.

Astronomię traktowali jako geometrię stosowaną, a muzykę - jako arytmetykę stosowaną. Te cztery dyscypliny nazywano później *quadrivium* [łac., cztery drogi]. Stanowiły one podstawę nauczania w uniwersytetach. Od pitagorejczyków pochodzą także terminy: *filozofia* i *kosmos*, którym to mianem określali Wszechświat, widząc w nim pięknie uporządkowany system [gr. *kósmos* = ład, porządek, przeciwieństwo chaosu]. Obrót sfer niebieskich miał według nich wywoływać piękne dźwięki (muzyka sfer), których jednak nie słyszymy, gdyż będąc wystawieni na ich działanie od urodzenia, nie zwracamy już na nie uwagi.

Nowa planeta

We wrześniu 2006 r. astronomowie amerykańscy poinformowali o zaobserwowaniu niezwykle dużej i jasnej planety, krążącej wokół odległej od nas gwiazdy. Odkrycie to może doprowadzić do rewizji teorii na temat sposobu powstawania planet.

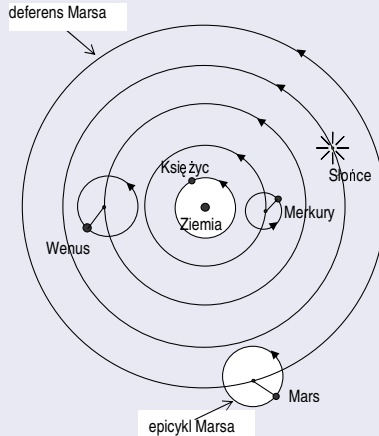


Rys. 9: Nowa planeta HAT-P-1

Nowa planeta

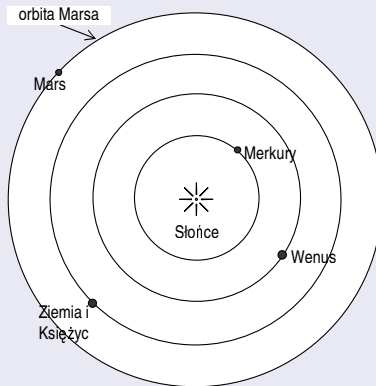
To 206 znana nam planeta spoza naszego Układu Słonecznego, w 176 układzie planetarnym innym niż Układ Słoneczny (w tym 21 układów z wieloma planetami).

Planeta ta znajduje się niezwykle blisko swojej gwiazdy, w odległości równej $1/7$ odległości pomiędzy naszym Słońcem a Merkurym. O ile Ziemi okążenie naszego Słońca zajmuje rok, nowo odkryta gwiazda potrzebuje na pełen obieg jedynie 4.5 naszego dnia. Dostrzeżono ją dzięki sieci teleskopów w Arizonie i na Hawajach. Odkrycie zbiło naukowców z tropu, ponieważ planeta jest o 24% większa, niż przewidywały obecnie obowiązujące teorie. Gwiazda ta wchodzi w skład podwójnego układu gwiazd i znajduje się w konstelacji Jaszczurki około 450 lat świetlnych od Ziemi.

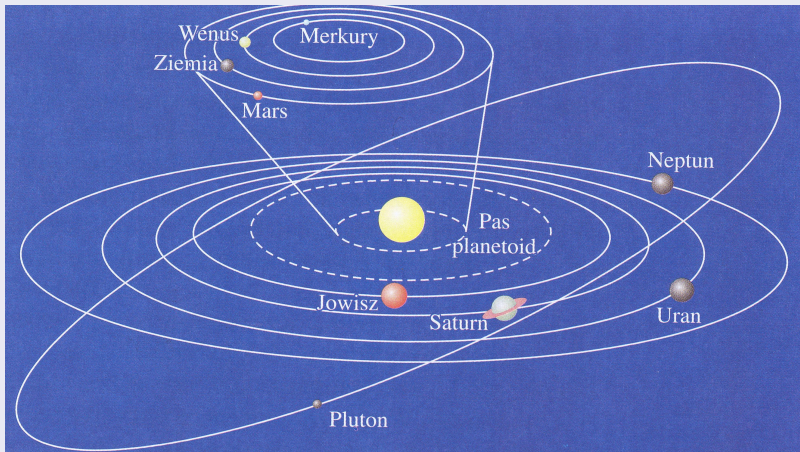


Rys. 10: Układ Słoneczny Klaúdiosa Ptolemeusza (*Almagest*, ~150)

Warto tu może tylko wspomnieć, że Kopernik w swej teorii nie pozbył się całkowicie epicykli, lecz tylko zredukował znacząco ich liczbę.



Rys. 11: Układ Słoneczny Mikołaja Kopernika (*De revolutionibus orbium coelestium*, 1543)



Rys. 12: Układ słoneczny

Astronomiczne jednostki odległości

Nazwa	Wielkość	Ziemia-Słońce
Jedn. astr. [AU]	$1 \text{ AU} \approx 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$	1
Parsek [pc]	$1 \text{ pc} \approx 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$ $\approx 2.063 \cdot 10^5 \text{ AU}$	0.000005
Rok świetlny [ly]	$1 \text{ ly} \approx 9.461 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $\approx 6.324 \cdot 10^4 \text{ AU}$ $\approx 0.3066 \text{ pc}$	500 s

Odległości planet od Słońca

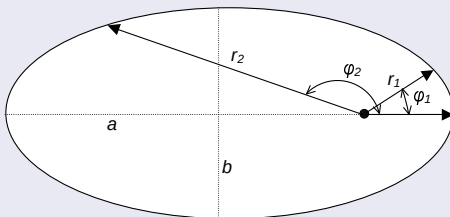
Obiekt	AU	ly	mln km
Merkury	0.38	3 min 10 s	57.9
Wenus	0.72	6 min	108.2
Ziemia	1	8 min 20 s	149.6
Mars	1.52	12 min 40 s	227.9
Jowisz	5.2	43 min 20 s	778.6
Saturn	9.54	1 h 19 min 30 s	1 433.5
Uran	19.19	2 h 39 min 55 s	2 872.5
Neptun	30.6	4 h 10 min 30 s	4 495.1
Pluton	39.53	5 h 29 min 25 s	5 906.4
Planetoidy	2 - 3		
Pas Kuipera	~ 30 - 50		

Prawa Keplera

Izaak Newton (1643 - 1727) sformułował swoje **prawo powszechnego ciążenia** na podstawie wyników obserwacji astronomicznych dotyczących ruchu planet. Obserwacje te pozwoliły Johannesowi Keplerowi (1571-1630) na sformułowanie trzech praw:

- 1 Wszystkie planety poruszają się po elipsach, przy czym Słońce znajduje się w jednym z ognisk każdej z tych elips.
- 2 W ruchu planet po orbicie prędkość polowa każdej planety jest wielkością stałą.
- 3 Kwadraty czasów obiegu Słońca przez dwie planety mają się do siebie tak, jak sześciiany dużych pól torów tych planet.

Elipsa



Rys. 13: Geometria elipsy

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (1)$$

p – parametr; ε – mimośród; a , b – półosie elipsy.

Elipsa

Równanie elipsy we współrzędnych biegunowych

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2)$$

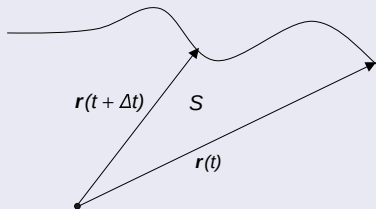
Po zróżniczkowaniu

$$\frac{1}{p} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Przypomnienie: Przyspieszenie we współrzędnych biegunowych:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \quad (4)$$

Prędkość polowa



Rys. 14: Prędkość polowa

Prędkość polowa to wektor prostopadły do płaszczyzny w której zachodzi ruch i o zwrocie sprzężonym z kierunkiem ruchu po krzywej regułą śruby prawoskrętnej, o długości równej pochodnej wielkości pola S zakreślonego przez wektor wodzący $\mathbf{r}$ po czasie t .

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (5)$$

Prędkość polowa

Wynika stąd, że moduł prędkości polowej

$$c = |\mathbf{c}| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2} r v_\varphi = r^2 \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Różniczkując po czasie

$$0 = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = r a_\varphi \quad (7)$$

czyli znika składowa transwersalna przyspieszenia.

Wniosek: przyspieszenie jest zawsze skierowane ku Słońcu, więc siła musi być centralna!

Prędkość polowa

Ponadto:

$$\dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{2c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2c \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (8)$$

czyli

$$\ddot{r} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} (\dot{r}) = -\frac{4c^2}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (9)$$

skąd

$$a_r = -\frac{4c^2}{p} \frac{1}{r^2} = k \frac{1}{r^2}, \quad (10)$$

czyli przyspieszenie, **a więc i siła**, są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od Słońca.

Trzecie prawo Keplera

Współczynnik przy r^{-2}

$$k = -\frac{4c^2}{p} = -\frac{4c^2 a}{b^2}, \quad (11)$$

Prędkość polowa, to

pole elipsy $\pi a b$ podzielone przez czas obiegu T

$$k = -\frac{4a}{b^2} \left(\frac{\pi a b}{T} \right)^2 = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}. \quad (12)$$

Iloraz a^3/T^2 ma jednakową wartość dla wszystkich planet, więc wszystkie planety są przyciągane przez Słońce wg uniwersalnego prawa: **istnieje tylko jedna postać prawa ciążenia.**

Rozpatrzmy duże ciało o masie m_1 i promieniu r_0 (np. Ziemia) i małe ciało o masie m_2 w małej odległości z nad Ziemią ($z \ll r_0$).

Prawo powszechnego ciążenia Newtona

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r} \quad (13)$$

Uniwersalna stała grawitacji

$$G = (6.6732 \pm 0.0031) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Potencjał siły (13) wynosi

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (14)$$

$$r \rightarrow r_0 + z$$

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r_0(1 + z/r_0)} \approx -\frac{G m_1 m_2}{r_0} + \frac{G m_1 m_2 z}{r_0^2}, \quad (15)$$

czyli

$$V = m_2 g z + \text{const} \quad (16)$$

Przyspieszenie ziemskie

$$g = \frac{G m_1}{r_0^2}. \quad (17)$$

To tylko przybliżenie, należy uwzględnić np. wpływ obrotu Ziemi (siłę odśrodkową). Korzystając ze wzoru (17) możemy oszacować masę Ziemi.

Trajektorie

Krzywe stożkowe

Powróćmy do równań (2) i (3)

$$(*) \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

$$(**) \quad \frac{1}{p} = \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}.$$

Równanie (*) jest równaniem krzywej stożkowej z początkiem układu współrzędnych w jednym z ognisk. O charakterze krzywej decyduje mimośród ε .

Trajektorie

Krzywe stożkowe

Mimośród	Efekt
$\varepsilon < 1$	r – skończone dla wszystkich wartości kąta φ (elipsa)
$\varepsilon = 1$	r dąży do ∞ dla $\cos \varphi = -1$, czyli $\varphi = \pi$ (parabola)
$\varepsilon > 1$	z warunku, by $r > 0$, mamy $ \varphi < \arccos \varepsilon^{-1}$, to asymptoty (hiperbole)

Prędkość kosmiczna

Prędkość kosmiczna – prędkość, jaką musi osiągnąć dowolne ciało (np. rakieta, statek kosmiczny), by jego energia kinetyczna pokonała grawitację Ziemi i oddaliła się na odległość umożliwiającą pozostawanie w przestrzeni kosmicznej bez dodatkowego napędu. Jest kilka prędkości kosmicznych. Obliczył je polski inżynier mechanik i astronom Ary Sternfeld.

Prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna ($v_I = 7.91 \text{ km/s}$) to prędkość, jaką należy nadać obiektowi, aby mógł on orbitować wokół Ziemi lub innego ciała kosmicznego. Ściślej, jest to prędkość na kołowej orbicie o promieniu równym średniemu promieniowi danego ciała kosmicznego, wokół punktowej (lub kulistej, o sferycznie równomiernym rozkładzie gęstości) masy. Jest to pewna idealizacja i nie odpowiada rzeczywistości przypadkowi, np. rakiety startującej z Ziemi, która musi pokonać jeszcze opory atmosfery i dodatkowo wznieść się na wysokość, na której atmosfera jest wystarczająco rozrzedzona. Prędkość tę otrzymamy obliczając przyspieszenie grawitacyjne:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2}, \quad (18)$$

i porównując z przyspieszeniem dośrodkowym w ruchu po okręgu

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (19)$$

Pierwsza prędkość kosmiczna

Stąd

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (20)$$

gdzie G – stała grawitacji, M – masa ciała kosmicznego, R – promień ciała kosmicznego. Po podstawieniu wartości liczbowych dla Ziemi dostajemy $v_I = 7.91$ km/s. W rzeczywistości rakiety startując z Ziemi na wschód otrzymują już część prędkości z ruchu rotacyjnego planety. Dlatego też kosmodromy najchętniej buduje się jak najbliżej równika, gdzie zysk prędkości jest największy (w przypadku startu z równika Ziemi wynosi ok. 463 m/s).

Druga prędkość kosmiczna

Druga prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki) - prędkość potrzebna do opuszczenia orbity okołoziemskiej i osiągnięcia orbity okołosłonecznej wynosi $v_{II} = 11.19 \text{ km/s}$. Druga prędkość kosmiczna to prędkość, jaką należy nadać obiektowi, aby wyrwał się z grawitacji danego ciała kosmicznego. Ścisłej, jest to prędkość, jaką musi osiągnąć dany obiekt na powierzchni danego ciała kosmicznego, aby tor jego ruchu stał się parabolą lub hiperbolą. Obliczamy ją znajdując różnicę w energii obiektu znajdującego się na powierzchni danego ciała kosmicznego oraz w nieskończoności. Energia w nieskończoności równa jest 0, natomiast na powierzchni jest sumą energii potencjalnej $E_p = -G \frac{Mm}{R}$ oraz kinetycznej $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Dostajemy więc równanie, z którego wynika:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (21)$$

Widać więc, że obie prędkości różnią się o czynnik $\sqrt{2} = 1.4142 \dots$. Wszystko to przy założeniu, że nie ma innego ciała kosmicznego oprócz rozpatrywanego – a że zwykle inne ciała są (w przypadku np. Układu Słonecznego), więc tor lotu w praktyce nie jest parabolą, bo zginają go po swojemu oddziaływania grawitacyjne tych innych ciał (Słońca, Księżyca...).

Trzecia prędkość kosmiczna

Trzecia prędkość kosmiczna – to prędkość potrzebna do opuszczenia Układu Słonecznego

$$V_{III} = 16.7 \text{ km/s}$$

Prędkość ta przy powierzchni Ziemi wynosi ok. 42 km/s, lecz wobec jej ruchu obiegowego wokół Słońca wystarczy przy starcie z jej powierzchni w kierunku zgodnym z tym ruchem nadać obiektowi prędkość 16.7 km/s, by opuścił on Układ Słoneczny.

Czwarta prędkość kosmiczna

Czwarta prędkość kosmiczna - to prędkość potrzebna do opuszczenia Naszej Galaktyki

$$v_{IV} \sim 130 \text{ km/s}$$

Prędkość ta wynosi ok. 350 km/s, lecz wykorzystując fakt ruchu Słońca dookoła środka Galaktyki, wystarczy obiektowi nadać prędkość tylko około 130 km/s w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu obiegowego Słońca względem centrum Galaktyki.

Koniec? :-)

Koniec wykładu 5