

Fizyka dla Informatyków
Wykład 4

KINEMATYKA BRYŁY SZTYWNEJ DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO TARCIE

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Spis treści

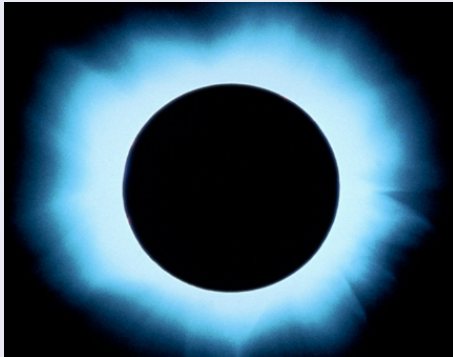
- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Wstęp

Kilka słów, o czym dzisiaj będziemy opowiadać.



Rys. 1: Pełne zaćmienie Słońca

Kinematyka bryły sztywnej

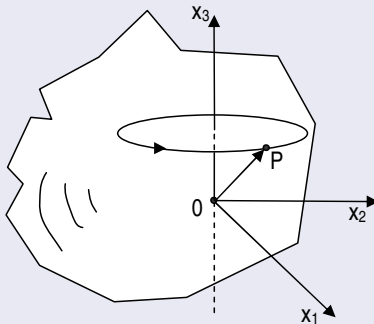
W przyrodzie ciała idealnie sztywne nie występują. Mimo to, bardzo często używa się ich do modelowania różnego rodzaju zachowań ciał niesztywnych, gdy odpowiednie deformacje można pominąć, przynajmniej w pierwszym przybliżeniu. Sytuacja taka występuje na przykład w badaniu ruchu planet w Układzie Słonecznym. Z powodzeniem możemy zaniedbać wybuchy wulkanów na Hawajach, gdyż ich wpływ na zmianę orbity Plutona jest minimalny. Nową i najważniejszą cechą, jaką należy uwzględnić przy rozpatrywaniu ruchów bryły sztywnej w porównaniu z ruchami punktu materialnego, jest ruch obrotowy. Punkt materialny jest pozbawiony rozciągłości, więc dopiero w tym rozdziale możemy zbadać, jakie nowe elementy pojawiają się wraz ze zwiększeniem wymiarów badanego obiektu.

Kinematyka bryły sztywnej

Mówimy, że ciało sztywne porusza się *czystym ruchem obrotowym*, jeśli każdy punkt ciała porusza się po okręgu, a środki tych okręgów leżą na linii prostej. Linie tę nazywamy *osią obrotu ciała*.

Z definicji tej wynika, że do opisu czystego ruchu obrotowego ciała wystarczy wybrać jeden jego punkt nie leżący na osi obrotu (dlaczego?) no i oczywiście zdefiniować oś obrotu.

Kinematyka bryły sztywnej

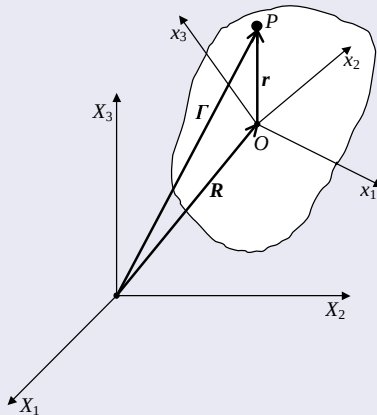


Rys. 2: Czysty ruch obrotowy ciała sztywnego wokół osi $0x_3$

Kinematyka bryły sztywnej

W ogólności ruch ciała składa się z ruchu postępowego (translacji) i z ruchu obrotowego (rotacji). Ruch obrotowy może odbywać się wokół osi obrotu leżącej poza ciałem (patrz Układ Słoneczny) i wtedy trzeba umieć określić położenie osi układu współrzędnych sztywno związanych z ciałem względem nieruchomego układu współrzędnych związanego z wybranym układem odniesienia (Rys. 3). Ruchy obrotowo-translacyjne są na ogół dosyć skomplikowane (patrz np. ruch Ziemi względem Słońca i ruch Księżyca względem Ziemi).

Kinematyka bryły sztywnej



Rys. 3: Układy współrzędnych: ruchomy (x_1, x_2, x_3) i nieruchomy (X_1, X_2, X_3)

Kinematyka bryły sztywnej

nuw i ruw

W celu opisanie ruchu bryły sztywnej wprowadzimy dwa układy współrzędnych: nieruchomy układ współrzędnych (X_1, X_2, X_3) (nuw) i ruchomy układ współrzędnych (x_1, x_2, x_3) (ruw). Układ ruchomy jest sztywno związany z bryłą i bierze udział we wszystkich jej ruchach. Ze względu na wygodę, układ ten umieszcza się w środku bezwładności bryły.

Liczba stopni swobody bryły sztywnej

Położenie bryły sztywnej względem nieruchomego układu odniesienia, i związanego z nim nieruchomego układu współrzędnych, w pełni jest określone przez położenie związanego z nią układu współrzędnych. Niech wektor $\mathbf{R}$ określa położenie początku O ruchomego układu współrzędnych. Orientację osi tego ruw względem nrw określają trzy niezależne kąty, więc razem z trzema współrzędnymi wektora $\mathbf{R}$ mamy sześć współrzędnych.

Wniosek: *każda bryła sztywna to układ mechaniczny o sześciu stopniach swobody.*

Kinematyka bryły sztywnej

Położenie

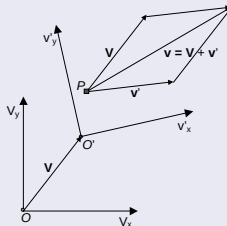
Położenie dowolnego punktu P bryły sztywnej o masie m w nuw określa wektor wodzący $\mathbf{r}$, a w ruw wektor wodzący $\mathbf{\Gamma}$. Infinitesimalne przemieszczenie $d\mathbf{\Gamma}$ punktu P składa się z translacji $d\mathbf{R}$ środka bezwładności i z przemieszczenia $d\varphi \cdot \mathbf{r}$ względem środka bezwładności o infinitesimalny kąt $d\varphi$, czyli

$$d\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{R} + d\varphi \cdot \mathbf{r} \quad (1)$$

Środek bezwładności

Pęd zamkniętego systemu mechanicznego ma różną postać w różnych (inercjalnych) układach odniesienia. Jeśli układ odniesienia O' porusza się względem układu odniesienia O z prędkością $\mathbf{V}$, to prędkości $\mathbf{v}'$ i $\mathbf{v}$ względem tych układów odniesienia łączy związek

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (2)$$



Rys. 4: Układy współrzędnych: ruchomy i nieruchomy; dodawanie prędkości

Środek bezwładności

Związek pędów w ruw i nuw

Ciało sztywne często traktuje się jako układ o skończonej bądź nieskończonej liczbie punktów materialnych o masach punktowych m_i i o stałych odległościach między nimi: $m = \sum_i m_i$ (prawo addytywności mas). Pęd ciała możemy więc zapisać:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}' + \mathbf{V} \sum_i m_i, \quad (3)$$

Zawsze istnieje taki układ odniesienia K' w którym $\mathbf{p}' = 0$, więc

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_i m_i}. \quad (4)$$

Środek bezwładności

Jeśli pęd całkowity układu mechanicznego jest równy zeru, to jest on nieruchomy względem tego układu odniesienia: prędkość $\mathbf{V}$ ma sens prędkości ciała jako całości: prawo zachowania pędu pozwala określić kiedy ciało spoczywa, a kiedy jest w ruchu.

Uwaga: *badając zamknięty układ mechaniczny korzystne jest posługiwać się takim układem odniesienia, w którym jego środek bezwładności spoczywa. Tym samym wyłącza się z rozpatrywania jednostajny i prostoliniowy ruch rozważanego układu.*

Wzór (4) można potraktować jako pochodną po czasie wyrażenia (Rys. 3)

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{\Gamma}_i}{\sum_i m_i} . \quad (5)$$

Prędkość

Jeśli ruch ten zaszedł w czasie dt , to

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{\Omega}, \quad (6)$$

czyli

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}. \quad (7)$$

Prawo zachowania pędu

Środek bezwładności ciała porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym

Energia

Energia wewnętrzna

Energia wewnętrzna E_w – energia spoczynkowa układu mechanicznego, składa się z energii kinetycznej względnego ruchu cząsteczek ciała i energii potencjalnej ich oddziaływania.

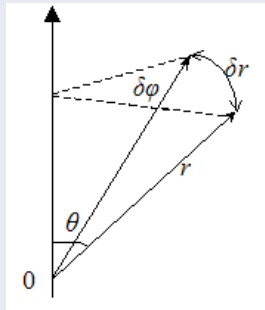
Energia całkowita

Energia całkowita E układu poruszającego się z prędkością V

$$E = \frac{m V^2}{2} + E_w \quad (8)$$

Moment pędu

Prawo zachowania momentu pędu wynika z *izotropii przestrzeni* – funkcja Lagrange'a powinna być niezmiennicza ze względu na obroty.



Rys. 5: Infinitesimalny ruch obrotowy

Moment pędu

Przyrost wektora wodzącego

$$|\delta \mathbf{r}| = r \sin \theta \cdot \delta \varphi, \quad \delta \mathbf{r} = \delta \varphi \cdot \mathbf{r}. \quad (9)$$

Przyrost prędkości

$$\delta \mathbf{v} = \delta \varphi \cdot \mathbf{v}. \quad (10)$$

Lagrangian

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \delta \mathbf{v}_i \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \dot{\mathbf{p}}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{p}_i, \quad (12)$$

Niezmienniczość Lagrangianu

$$\sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i(\delta\varphi \cdot \mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i(\delta\varphi \cdot \mathbf{v}_i)) = 0, \quad (13)$$

$$\delta\varphi \sum_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i) = \delta\varphi \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = 0. \quad (14)$$

Moment pędu

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{M} = 0. \quad (15)$$

Jest to **prawo zachowania momentu pędu**.

Dynamika

Punkt materialny w przestrzeni 3D ma trzy stopnie swobody, co oznacza, że może poruszać się po linii prostej (ruch jednowymiarowy), po płaszczyźnie (np. po krzywej: spirala, krzywa balistyczna, krzywa zamknięta) lub w sposób absolutnie dowolny (ruchy Browna).

Równanie ruchu

Rozpatrzmy równanie ruchu

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}}, \quad (16)$$

gdzie $\mathbf{F}$ - znana siła. Może być ona stała, czyli niezależna ani od położenia $\mathbf{r}$ ani od czasu t , a m – masa punktu materialnego. Całkowanie tego równania dla stałej siły prowadzi do wyniku

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F}}{m} t^2. \quad (17)$$

Warunki początkowe

Jeśli założymy, że w chwili początkowej $t_0 = 0$ punkt materialny miał położenie $\mathbf{r}_0$ i prędkość początkową $\mathbf{v}_0$, to możemy określić jego położenie w każdym momencie, zarówno dla czasów $t > t_0$ jak i dla $t < t_0$. Możemy więc przewidzieć zarówno przyszłość jak i opowiedzieć co było w przeszłości. O takich sytuacjach mówimy, że dotyczą procesów odwracalnych.

Odwracalność

Problem odwracalności jest w fizyce jednym z najważniejszych i mimo wielu wysiłków nie został jeszcze do końca rozwiązany. Teorie procesów nieodwracalnych są dużo bardziej skomplikowane i zawierają wiele trudnych pojęć. Dział fizyki traktujących o zjawiskach i procesach nieodwracalnych to **termodynamika**, chociaż na dobrą sprawę powinien raczej nazywać się termostatyką. Ale więcej o tym przy innej okazji.

Bardzo ciekawa jest sytuacja, gdy

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t). \quad (18)$$

Zależność od położenia i od czasu może być dowolnie skomplikowana, w szczególności może to być wektorowa funkcja nieliniowa. Rozwiązania takiego równania czasami bardzo silnie zależą od warunków początkowo - brzegowych, co prowadzi do chaosu, a więc do niemożności przewidzenia zachowania się rozwiązania w większych przedziałach czasowych.

Równanie (16) to uproszczona wersja **II zasady dynamiki Newtona**. Założyliśmy tam, że zarówno siła $\mathbf{F}$ jak i masa m są wielkościami niezależnymi od czasu. A przecież wcale tak nie musi być. I na ogół tak nie jest.

Siła i masa zmienne w czasie

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t), \quad m = m(t). \quad (19)$$

II prawo dynamiki Newtona

Newton sformułował swe prawo tak:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \quad (20)$$

gdzie $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – pęd ciała.

Równanie to przyjmuje po wykonaniu operacji różniczkowania następującą postać:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{dm(t)}{dt} \mathbf{v}(t) + m(t) \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}, \quad (21)$$

czyli wzbogacone jest w porównaniu z równaniem (16) o pierwszy człon. Widać więc, że siła w sformułowaniu Newtona jest zależna od czasu dzięki możliwości zmiany w czasie zarówno masy jak i prędkości.

Ruch jednostajnie przyspieszony

Przyspieszenie to zmiana prędkości na jednostkę czasu. Jeśli jest ono stałe, to przyspieszenie średnie $a_{\text{śr}}$ równe jest **przyspieszeniu chwilowemu**:

$$a = a_{\text{śr}} = \frac{v - v_0}{t - 0}, \quad (22)$$

gdzie v prędkość w chwili t , v_0 – prędkość początkowa w chwili $t = 0$. Z równania (22) wynika, że

$$v = v_0 + a t. \quad (23)$$

Jak widać, dla $t = 0$ prędkość $v = v_0$, co jest zgodne z przyjętym przez nas założeniem. Podobnie możemy stwierdzić, że

$$x = x_0 + v_{\text{śr}} t, \quad (24)$$

gdzie

$$v_{\text{śr}} = \frac{1}{2} (v_0 + v). \quad (25)$$

Po wstawieniu równania (25) do (24) i po uwzględnieniu równania (23) otrzymujemy

$$s = x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (26)$$

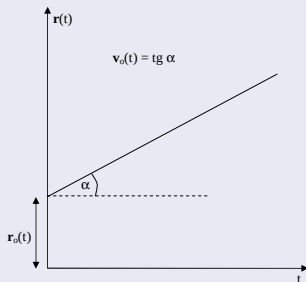
Równania (23) i (26) to dwa podstawowe równania pozwalające rozwiązać każde zadanie z ruchu jednostajnie przyspieszonego. Zauważmy, że występuje w nich 6 wielkości: s – droga, x_0 – położenie początkowe, v_0 – prędkość początkowa, v – prędkość chwilowa, a – przyspieszenie i t – czas.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego**
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Rozwiązanie (17) równania ruchu (16) w sytuacji, gdy na ciało nie działa żadna siła, przyjmuje postać

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (27)$$



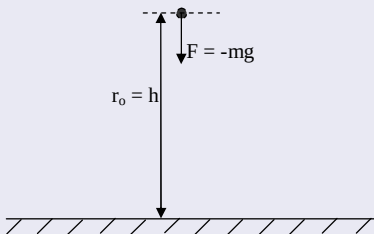
Rys. 6: Ruch punktu materialnego w przypadku braku sił

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego**
 - Brak siły
 - Siła stała**
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Prawdziwa dynamika zaczyna się dopiero w momencie, gdy suma wszystkich sił działających na ciało jest różna od zera. Bogactwo różnorodnych zjawisk jest przeogromne. Z konieczności ograniczymy się do kilku podstawowych przykładów.

Swobodny spadek ciał



Rys. 7: Spadek swobodny

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego**
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał**
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Swobodny spadek ciał

Pojawiają się pytania: jak długo ciało będzie spadać i jaka będzie jego prędkość w chwili uderzenia w powierzchnię?

W chwili uderzenia o powierzchnię $r = 0$, więc rozwiązanie (17) przyjmuje postać

$$0 = h - \frac{m g}{2m} t^2, \quad (28)$$

skąd mamy natychmiast

$$t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (29)$$

To jest wynik pochodzący z matematyki.

Swobodny spadek ciał

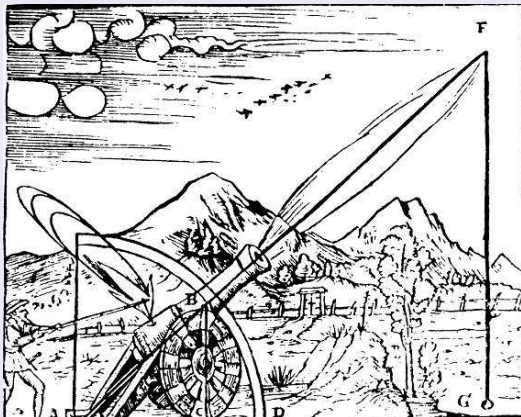
Odpowiedź na drugie pytanie szybko znajdziemy z prawa zachowania energii mechanicznej: energia potencjalna, jaką ma ciało w położeniu $r = h$, w chwili uderzenia zamieni się całkowicie w jego energię kinetyczną, a więc

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2, \quad (30)$$

skąd mamy

$$v = \pm \sqrt{2 g h}. \quad (31)$$

Zwróćmy uwagę, że wynik ten zaprzecza naszemu codziennemu doświadczeniu. We wzorach (29) i (31) nie ma masy m . Wynika z nich, że zarówno piórko, jak i wielotonowy ciężar, spadną na ziemię w takim samym czasie i będą miały taką samą prędkość końcową! Obserwowalibyśmy takie zachowanie ciał gdyby poruszały się one w próżni, a nie w powietrzu, gdzie występują siły wyporu i tarcie i inne siły spowalniające ruch ku ziemi. A przecież próżni nie ma! Tak przynajmniej twierdził Arystoteles i wszyscy jego następcy przez wiele stuleci.



Rys. 8: Rzut ukośny (wyrzut z działa) zgodny z fizyką Arystotelesa: kula może poruszać w górę i w dół tylko po liniach prostych

Nieco historii

Ich doświadczenie, podobnie jak nasze codzienne obserwacje, pokazywały, że wszystkie ciężkie ciała „pragną” znaleźć się jak najbliżej środka Ziemi, i dopiero tam po dotarciu do najniższego z możliwych położen zamierają w bezruchu. Ruch w jakimkolwiek innym kierunku jest możliwy tylko za pomocą „poruszyciela” i trwa do chwili, gdy kończy się jego działanie. Od tego momentu ciało zaczyna poszukiwać swego naturalnego szczęścia w prostym ruchu w dół (patrz rys. 8). Prędkość ciała zależy od napotykanego oporu ośrodka przez który się przemieszcza. Z tego właśnie powodu Arystoteles twierdził, że próżnia nie istnieje, w przeciwnym bowiem razie ciała mogłyby się przemieszczać w jednej chwili na dowolnie duże odległości. Ale takiego faktu nigdy nie zaobserwowano, a więc próżni nie ma. Jest to przykład teorii, w której uwzględniono tylko niektóre obserwowane fakty, a te które zaprzeczały teorii i pogładowi na świat, pomijano.

Nieco historii

Pod koniec XV wieku Leonardo da Vinci na swych rysunkach pokazywał, że tory kul armatnich są łagodnie zakrzywione, ale nie podał naukowego wyjaśnienia tego faktu. W roku 1551 Fontana, zwany Tartaglia (Jąkała), profesor matematyki z uniwersytetu w Wenecji, opublikował książkę pod tytułem *Nova scientia*, w której dowodził, że kule armatnie poruszają się po zakrzywionych trajektoriach i że największy zasięg mają wtedy, gdy lufy ustawi się pod kątem 45° . Ale prawdziwego przełomu w filozoficznym poglądzie na świat odmieniający bieg europejskiej nauki dokonał dopiero jego uczeń Giovanni Benedetti. Sprawdził on doświadczalnie teorię Arystotelesa mówiącą, że ciała cięższe spadają szybciej niż ciała lekkie. Związał mianowicie dwa ciała o jednakowym ciężarze nicią o znikomej masie i badał, czy spadają one dwa razy szybciej niż każde z ciał osobno. Niczego takiego jednak nie zaobserwował. Wywnioskował stąd, że ciała spadają z różnymi prędkościami, gdyż mają różną zdolność do pokonywania oporu powietrza, podobnie jak opisywane przez Archimedesa ciało zanurzone w wodzie. Gdyby nie było oporów, wszystkie ciała spadałyby z jednakową prędkością. Ta hipoteza musiała poczekać na potwierdzenie do następnego stulecia, gdy wynaleziono maszynę próżniową.

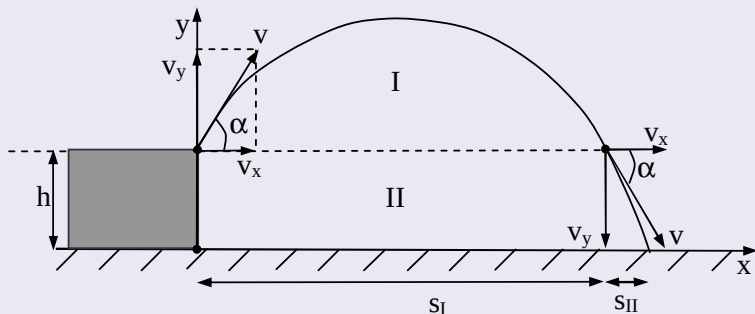
Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego**
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny**
 - Rzut poziomy
- 4 Tarcie

Rzut ukośny

Rozpatrzmy rzut ukośny ciała (punktu materialnego) z prędkością początkową $v_0 = v(t)|_{t=0}$ pod kątem α_0 z wysokości h nad powierzchnią w polu grawitacyjnym z przyspieszeniem g skierowanym zawsze do dołu (patrz rys. 9). Ciało jest punktowe i nie napotyka na swej drodze żadnych oporów, więc w kierunku poziomym nie będzie ono doznawać żadnego przyspieszenia (tu raczej opóźnienia). Będzie również zachowana płaszczyzna jego ruchu, czyli zagadnienie jest typu 2D. Prędkość $\mathbf{v}$ jest zawsze styczna do toru, a tor w trakcie ruchu ciała ulega zmianie, więc i prędkość $\mathbf{v}$ będzie się zmieniać.

Rzut ukośny



Rys. 9: Rzut ukośny

Rzut ukośny

Z rys. 9 wynika, że w każdej chwili

$$v_x(t) = v \cos \alpha(t), \quad v_y(t) = v \sin \alpha(t). \quad (32)$$

W momencie ponownego osiągnięcia poziomu h kąt $\alpha^h = -\alpha^s$, więc $v_y^h = -v_y^s$, gdzie v_y^s – pionowa prędkość startowa, a v_y^h – pionowa prędkość ponownego osiągnięcia poziomu h . W punkcie maksymalnego wzniesienia się nad poziom wyrzutu kąt $\alpha = 0^\circ$, więc $v_y = 0$. Badanie ruchu punktu materialnego w zaproponowanym rzucie ukośnym możemy rozłożyć na dwie części: na ruch w obszarze I i na ruch w obszarze II.

Warunki początkowe dla ruchu w obszarze II to warunki, w jakich zakończył się ruch w obszarze I. Zwróćmy uwagę, że ruchy w kierunku poziomym i pionowym odbywają się niezależnie – fakt ten znacznie ułatwi rozwiązanie analizowanego zagadnienia.

Zauważmy również, że całkowita droga pozioma wynosi $s = s_I + s_{II}$. (Indeksy I i II będziemy opuszczać, gdy z kontekstu wynika jasno o jaki obszar chodzi.)

Rzut ukośny

Ruch w obszarze I

Punkt materialny o masie m wyrzucamy w górę pod kątem α_0 . Ponieważ $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0 = \text{const}$ (gdyż w kierunku poziomym przyspieszenie nie występuje), więc

$$s_l = v_x t_l, \quad (33)$$

gdzie t_l – czas potrzebny na ponowne osiągnięcie poziomu h . W kierunku poziomym x przebyta droga dana jest zmodyfikowanym wzorem (24)

$$x = x_0 + v_{0x} t = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha_0, \quad (34)$$

gdyż $x_0 = 0$. Możemy stąd wyznaczyć czas potrzebny na przebycie drogi $x = s_l$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}. \quad (35)$$

Rzut ukośny

Ruch w obszarze I

Ruch w kierunku pionowym jest ruchem przyspieszonym, więc

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha(0) - gt. \quad (36)$$

Ponieważ mamy, iż

$$y = h + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = h + (v_0 \sin \alpha_0) t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (37)$$

Wstawiając w równanie (37) czas z równania (35), otrzymujemy równanie trajektorii $y = y(x)$

$$\begin{aligned} y &= h + \sin \alpha_0 \frac{x}{\cos \alpha_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \\ &= h + x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \end{aligned} \quad (38)$$

Rzut ukośny

Ruch w obszarze I

Odległość jaką przebędzie punkt materialny do ponownego osiągnięcia poziomu h wyliczamy z warunku $y = h$, czyli

$$x \left(\frac{g x}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} - \operatorname{tg} \alpha_0 \right) = 0. \quad (39)$$

Rozwiązanie $x = 0$ nazywamy rozwiązaniem trywialnym i jest mało ciekawe. Drugie rozwiązanie przyjmuje postać

$$x = \frac{2 v_0^2}{g} \operatorname{tg} \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0. \quad (40)$$

Rzut ukośny

Ruch w obszarze I

Możemy stąd obliczyć kąt rzutu (dla kątów $\alpha_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$), przy którym osiągnany jest maksymalny zasięg dla ustalonej prędkości v_0 i dla stałego pola grawitacyjnego g

$$\frac{dx}{d\alpha_0} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha_0 = 0 \rightsquigarrow \cos 2\alpha_0 = 0 \rightsquigarrow \alpha_0 = 45^\circ. \quad (41)$$

Wstawiając równanie (40) do równania (35) możemy obliczyć czas potrzebny do osiągnięcia powtórnie poziomu h

$$t = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{v_0 g \cos \alpha_0} = \frac{2}{g} v_0 \sin \alpha_0. \quad (42)$$

Widać, że ten czas jest najdłuższy dla kąta $\alpha_0 = 90^\circ$, czyli dla rzutu pionowego w górę.

Rzut ukośny

Ruch w obszarze II

Ruch punktu materialnego w obszarze II nazywamy rzutem ukośnym w dół. Gdyby nie było początkowej składowej pionowej prędkości, byłby to rzut poziomy. Punktem startowym ruchu punktu materialnego w obszarze II jest jego punkt końcowy w obszarze I. W punkcie tym $v_{0x}^h = v_{0x}^s = \text{const}$, $v_{0y}^h = -v_{0y}^s$ (patrz rys. 9). Droga do przebycia w pionie wynosi h , czyli

$$h = -v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (43)$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na czas $t = t_{II}$, więc jego rozwiązanie wyraża się wzorem

$$t_{1,2} = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2g h}}{g}. \quad (44)$$

Rzut ukośny

Ruch w obszarze II

Jedno z tych rozwiązań (dla $h \geq 0$) jest zawsze mniejsze od zera (dlaczego?), a drugie jest większe od zera. No i oczywiście pole grawitacyjne też musi być różne od zera (tu zakładamy, że jest dodatnie).

Znając czas, w jakim ciało przebywa w ruchu, możemy obliczyć zasięg rzutu. Wynosi on oczywiście

$$x_{II} = v_{0x} t_2 . \quad (45)$$

Rzut ukośny. Podsumowanie

Zasięg

$$\begin{aligned} s &= x_I + x_{II} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0 + v_{0x} \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g}, \\ &= \frac{v_0}{g} \left(\frac{1}{2} v_0 \sin 2\alpha_0 + \cos \alpha_0 \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Czas trwania ruchu

$$\begin{aligned} t &= t_I + t_{II} = \frac{2}{g} v_0 \sin \alpha_0 + \frac{-v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} \\ &= \frac{1}{g} \left(v_0 \sin \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 + 2gh} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Rzut ukośny. Podsumowanie

Maksymalne wzniesienie nad poziom ziemi

Extremum funkcji kwadratowej:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} + h. \quad (48)$$

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Kinematyka bryły sztywnej
- 3 Dynamika punktu materialnego**
 - Brak siły
 - Siła stała
 - Swobodny spadek ciał
 - Rzut ukośny
 - Rzut poziomy**
- 4 Tarcie

Rzut poziomy

Rzut poziomy to rzut ukośny pod kątem $\alpha = 0$. Mając już znalezione równania dla ruchu ukośnego, łatwo znajdziemy wszystkie interesujące nas wielkości.

Tarcie

Mamy tarcie:
statyczne i kinematyczne, oraz
poślizgowe i potoczyste.

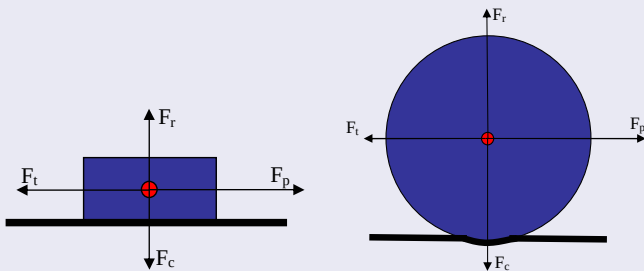
Czasami jest pożyteczne (gdyby go nie było nie moglibyśmy chodzić ani jeździć, nie dałoby się utrzymać niczego w ręku, a gwoździe i wkręty same by ze ścian wypadały), czasami szkodliwe (na przykład w silnikach samochodowych zużywa się około 20% paliwa na jego pokonanie). Tarcie ma na ogół charakter mezoskopowy, co oznacza, że przyczyną jego pojawienia się są zjawiska występujące na poziomie pośrednim pomiędzy poziomem atomowym (mikro) a poziomem ciał dużych (makro). Tarcie statyczne pojawia się w chwili, gdy zaczynamy na ciało działać siłą w celu wprowadzenia go w ruch. Łatwo się przekonać, że siła ta jest większa od siły potrzebnej do utrzymania ciała w ruchu. Przyczyna jest prosta, ale dokładny opis zjawiska jest często bardzo skomplikowany. W każdym razie, jeśli chcemy, aby po wprowadzeniu ciała w ruch poruszało się ono ze stałą prędkością, to musimy nieco zmniejszyć działającą siłę.

Tarcie

Ciało spoczywając „zagłębia” się w podłoże, leży w maleńkim „dołeczku” i chcąc je stamtąd wydobyć musimy użyć większej siły niż na pokonanie tylko mikrozadziorków występujących na styku ciała i podłoża. W rezultacie powierzchnia rzeczywistego kontaktu mezoskopowego obydwu powierzchni jest nawet kilka tysięcy razy mniejsza od pozornego kontaktu makroskopowego.

Technologia, zwana spawaniem na zimno, polega na bardzo precyzyjnym spasowaniu i dociśnięciu pod dużym ciśnieniem ekstremalnie gładkich powierzchni. Zachodzi tu oddziaływanie powierzchni na poziomie atomowym i skleione powierzchnie praktycznie są nierozzerwalne. Gdyby nie było zadziorków, spawanie na zimno zachodziłoby samoczynnie i wszelki ruch by ustał. Dzięki tym zadziorkom możliwy jest więc ruch posuwisty. Jak zwykle, dobre rozwiązanie polega na umiarze. Tarcie ma często charakter skokowy, któremu towarzyszą zjawiska akustyczne w postaci pisków i skrzypień. Jest to skutek losowego styku nierównych powierzchni. Nie zawsze są to przyjemne dźwięki.

Tarcie



Rys. 10: Tarcie poślizgowe i potoczyste, F_c – siła ciężkości, F_p – siła pociągowa, F_t – siła tarcia, F_r – siła reakcji

Tarcie

Tarcie w płynach

Tarcie występuje nie tylko pomiędzy ciałami stałymi. Występuje również w płynach, gdzie cząsteczki cieczy lub gazu „przyklejają” się do poruszającego się ciała, które musi ten płyn porozpychać na boki i uwolnić się od ciągnących się za nim drobinek płynu.

W naszym modelu tarcia pomiędzy ciałami stałymi przyjmujemy, że tarcie jest proporcjonalne do siły przyciskającej do podłoża

$$F_t = \mu F_c. \quad (49)$$

Na rys. 10 siła przyciskająca jest tożsama z siłą ciężkości. Przy takim podejściu, tarcie statyczne różni się od tarcia kinetycznego tylko wielkością współczynnika tarcia μ . Współczynniki tarcia, jak wynika ze wzoru (49), są bezwymiarowe, a ich wartości wyznacza się doświadczalnie.

Tarcie

Tarcie w płynach

Opór stawiany poruszającym się ciałom w płynach jest zjawiskiem bardziej skomplikowanym. Tu też omówimy uproszczony model, w którym zakładamy, że ciało porusza się w gazie, np. w powietrzu, ma kształt bardziej owalny (np. piłka) niż wydłużony (np. oszczep) i że ruch jest turbulentny, czyli że za ciałem tworzą się wiry. Przy tych założeniach zależność siły oporu od prędkości względnej v dana jest wzorem

$$G = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \quad (50)$$

gdzie C – wyznaczany doświadczalnie współczynnik oporu aerodynamicznego, ρ – gęstość masy gazu, S – pole przekroju poprzecznego ciała. Oczywiście, w różnych sytuacjach wielkości te są zmienne, ale tu przyjmujemy, że są stałe. Również zależność od kwadratu prędkości nie jest dana raz na zawsze, dla dużych prędkości może to być wyższa potęga v . Wielkość C waha się na ogół od 0.4 do 1.

Tarcie

Tarcie w płynach

Czasami wygodnie jest zgrupować wszystkie te parametry w jeden mnożnik, i wtedy

$$G = C_1 v^2. \quad (51)$$

Wzór (50) bardzo dobrze znają narciarze. Narciarze zjazdowi kulą się jak najbardziej przyjmując pozycję „na jajo”, by maksymalnie zmniejszyć powierzchnię swego „przekroju poprzecznego”, natomiast skoczkowie narciarscy, chcąc skoczyć jak najdalej, zwiększają tę powierzchnię, by jak najwolniej opadać w dół.

Tarcie

Tarcie w płynach

Równanie ruchu dla swobodnego spadku uwzględniającego opór powietrza ma postać

$$G - m g = m a , \quad (52)$$

gdzie a – przyspieszenie w ruchu w dół. Podobnie jak w ruchu po równi pochyłej, istnieje tu pewna prędkość maksymalna, po osiągnięciu której ciało spada ze stałą prędkością i nie przyspiesza już więcej.

Tarcie

W tej sytuacji granicznej równanie (52) przyjmuje postać

$$G - m g = 0 . \quad (53)$$

Tarcie

Po wstawieniu wzoru (50), mamy

$$\frac{1}{2} C_{\rho} S v^2 = m g, \quad (54)$$

i otrzymujemy, że prędkość graniczna v_g wynosi

$$v_g = \sqrt{\frac{2 m g}{C_{\rho} S}}. \quad (55)$$

Prędkości graniczne niektórych ciał w powietrzu

Ciało	v_g [m/s]	$s_{95\%}$ [m]
kula lekkoatlety	145	2 500
skoczek przed otwarciem spadochronu	60	430
skoczek po otwarciu spadochronu	5	3
piłka tenisowa	31	115
piłka do koszykówki	20	47
piłeczka do pingponga	9	10
kropla deszczu ($\phi = 1,5\text{mm}$)	7	6

W tabeli podano wartości v_g w m/s i drogę $s_{95\%}$, jaką przebywa ciało zanim osiągnie 95% prędkości granicznej.

Koniec? :-)

Koniec wykładu 4