Fizyka dla Informatyków
Wykład 12

Teoria względności Einsteina

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

P J W S T K

2 0 0 9

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Wstęp

Dzisiaj będziemy opowiadać

o teorii względności Ensteina!

- Skąd to się wszystko wzięło?
- Paradoksy fizyki XIX wieku.
- Czy mamy na to jakieś rozwiązanie?

Wstęp

Układ odniesienia

W celu określenia prędkości dowolnego obiektu musimy zdefiniować nieruchomy układ odniesienia.

Przykłady:

- fala w sznurze
- pasażer w pociągu: pasażer siedzący w przedziale wagonu, względem wagonu ma prędkość $v = 0$ km/godz. Jeśli zmierzymy jego prędkość względem stacji, to wynosi ona $v = 100$ km/godz. Stacja nie jest nieruchoma względem osi obrotu Ziemi, zależy od odległości od równika, i może osiągnąć prędkość $v = 1\,600$ km/godz. Środek Ziemi krąży wokół Słońca, więc prędkość pasażera pociągu może osiągnąć prędkość $v = 110\,000$ km/godz. Słońce krąży wokół środka masy Galaktyki... Która z tych prędkości jest prawdziwa?

Bardzo ważne pytanie: czy istnieje układ odniesienia zawsze będący w spoczynku? Czy istnieje absolutny układ odniesienia?

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)

Światło jest falą, więc zapewne musi w przestrzeni istnieć 'coś', co drga. To 'coś' nazwano eterem (*filoz.* według wyobrażeń filozofów starogreckich substancja wypełniająca wszechświat i określana jako pierwotna materia, piąta zasada bytu i źródło życia (poza czterema żywiołami: ogniem, wodą, ziemią i powietrzem)[SJP].

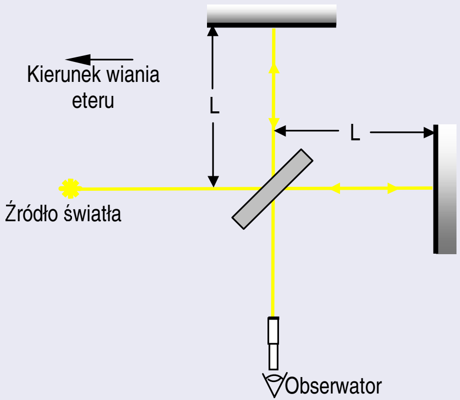
A.A. Michelson[a] i E.W. Morley poszukiwali absolutnego układu odniesienia wykorzystując **interferometr** (patrz rys. 1).

Wiązka światła monochromatycznego jest rozdzielana na dwie wzajemnie prostopadłe wiązki. Po odbiciu od zwierciadeł, wracają do miejsca, w którym nastąpiło ich rozdzielenie, i tu następuje ich interferencja. Wynik tego złożenia odbitych wiązek zależy od różnicy średnich prędkości w kierunku do i od zwierciadeł.

---

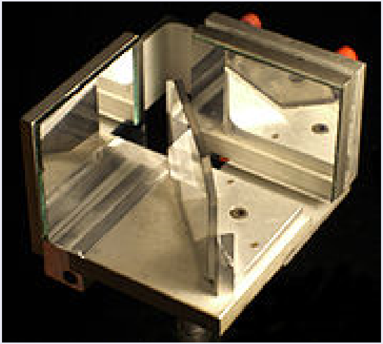
[a] Albert A. Michelson urodził się w roku 1852 w Strzelnie. Gdy miał 2 lata, jego rodzice wyemigrowali do USA. Michelson został pierwszym amerykańskim laureatem nagrody Nobla z fizyki.

Doświadczenie Michelsona-Morleya



Rys. 1: Schemat doświadczenia Michelsona-Morleya

Doświadczenie Michelsona-Morleya



Rys. 2: Interferometr Michelsona-Morleya

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)

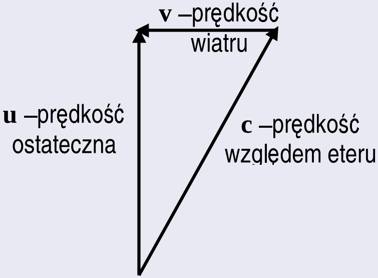
Interferometr ustawiano tak, by jedno z jego ramion było równoległe do kierunku ruchu Ziemi wokół Słońca. Następnie obracano urządzenie, by druga wiązka była równoległa do biegu Ziemi po okołosłonecznej trajektorii, ale żadnych efektów interferencyjnych nie zauważono, mimo wielokrotnego powtarzania eksperymentu, również przez innych badaczy.

Ziemia biegnie wokół Słońca z prędkością około 30 km/s, co stanowi około 1% prędkości światła. Precyzja użytych przyrządów z łatwością powinna pozwolić na odnotowanie różnicy prędkości światła w różnych kierunkach, gdyby prędkość światła dodawała się do prędkości Ziemi tak, jak obserwujemy to w naszym codziennym życiu dla innych zjawisk.

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)

Załóżmy, że Ziemia porusza się z prędkością v względem eteru. Dla obserwatora na Ziemi kierunek wiatru eteru skierowany jest za Ziemię. Wiązka światła poruszająca się w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu powietrza musi biec nieco pod wiatr, tak że ostatecznie biegnie w kierunku prostopadłym do kierunku wiatru eterowego. Światło biegnie z prędkością c względem eteru, ale wiatr eteru porywa je z powrotem, tak że trajektoria światła w interferometrze Michelsona-Morleya biegnie pod kątem prostym do wiatru (patrz rys. 3).

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)



Rys. 3: Wektory prędkości światła poruszającego się pod kątem prostym do wiatru eteru

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)

Z rys. 3 wynika, że prędkość względem interferometru wynosi

$$u = \sqrt{c^2 - v^2}\,, \tag{1}$$

więc czas potrzebny na pokonanie drogi w obie strony wynosi

$$t_\perp = \frac{2L}{u} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,. \tag{2}$$

Światło wysłane w kierunku 'pod wiatr' porusza się z prędkością c względem eteru i z prędkością $c - v$ względem Ziemi. Czas potrzebny na dotarcie do lustra wynosi $t_1 = L/(c - v)$. Prędkość z wiatrem wynosi odpowiednio $t_2 = L/(c + v)$. Drogę w obie strony światło pokonuje w czasie

$$t_{||} = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2cL}{c^2 - v^2}\,. \tag{3}$$

Doświadczenie A.A. Michelsona i E.W. Morleya (1887)

Mierząc czasy $t_{\perp}$ i $t_{||}$ można obliczyć prędkość Ziemi względem eteru. Ściślej, w eksperymencie chodziło nie tyle o zmierzenie prędkości Ziemi w ruchu po orbicie, bo była ona znana, lecz o wykrycie tego ruchu przy użyciu interferometru. Gdyby czas biegu promieni świetlnych był w obu przypadkach różny, to prążki interferncyjne powinny przesunąć się w inne miejsce, co też łatwo policzyć w jakie. Niczego takiego jednak nie udało się zaobserwować [4]. Okazało się, że **Ziemia nie porusza się względem eteru**.

Hendrik Antoon Lorentz i George Francis FitzGerald, w latach '90 XIX wieku, niezależnie od siebie, próbowali wyjaśnić niepowodzenie doświadczenia Michelsona-Morleya zakładając, że ramię interferometru leżące wzdłuż kierunku prędkości Ziemi ulega skróceniu względem swojej długości spoczynkowej L i względem drugiego ramienia. Ten wynik stał się później częścią szczególnej teorii względności, a efekt nazywa się skróceniem Lorentza-FitzGeralda.

Transformacja Galileusza

Jeżeli układ $A' = (x', y', z')$ porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym z prędkością v w kierunku x względem układu $A = (x, y, z)$, przy czym osie obu układów współrzędnych pozostają do siebie równoległe, to

$$x' = x - vt\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = t\,. \tag{4}$$

Odległość między dwoma punktami wynosi:

w układzie (x, y, z):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,, \tag{5}$$

w układzie (x', y', z'):

$$d' = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2}\,, \tag{6}$$

Widać, że $d = d'$.

Transformacja Galileusza

Prędkość światła w układzie (x, y, z) wynosi

$$c = \frac{dx}{dt}\,, \tag{7}$$

a w układzie (x', y', z')

$$c' = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - vt)}{dt} = c - v\,, \tag{8}$$

czyli

$$c' \neq c\,. \tag{9}$$

W układach podlegających transformacji Galileusza prędkość światła w układzie poruszającym się jest inna niż w układzie spoczywającym (sprzeczność z doświadczeniem MM).

Transformacja Lorentza

Niezmienniczość prędkości światła zapewnia **transformacja Lorentza**:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad y' = y\,, \quad z' = z\,, \quad t' = \frac{t - v\dfrac{x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad (10)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad y = y'\,, \quad z = z'\,, \quad t = \frac{t' + v\dfrac{x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \qquad (11)$$

$\beta = v/c$.

Transformacja Lorentza

Niech w chwili $t = t' = 0$ początki układów współrzędnych A i A' pokrywają się. Po upływie pewnego czasu t wysłany sygnał świetlny dotrze do punktu (x, y, z) w A spełniającego warunek

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \,, \tag{12}$$

który we współrzędnych (x', y', z') w A' spełnia warunek (po dokonaniu transformacji Lorentza)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \,. \tag{13}$$

Widać, że zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku światło rozchodzi się ze stałą prędkością c w obu układach współrzędnych.

Spis treści

Względność równoczesności

Niech w układzie A zachodzą równocześnie w chwili $t = t_1 = t_2$ dwa zjawiska w punktach x_1 i x_2. W układzie A', po transformacji Lorentza, mamy

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{14}$$

Widać, że $t_1 \neq t_2$: dwa zjawiska zachodzące równocześnie w A, nie są równoczesne w A'.

Spis treści

Dylatacja czasu

Niech z punktu x układu A wychodzą sygnały świetlne w odstępach czasu $\Delta t = t_2 - t_1$. W ruchomym układzie współrzędnych A', odstępy te wynoszą

$$\Delta t' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} < \Delta t \,. \tag{15}$$

Odstępy czasu w układzie nieruchomym są dla obserwatora w układzie ruchomym wydłużone.

Spis treści

Skrócenie długości

Mierzymy długość pręta w nieruchomym układzie A: $d = x_2 - x_1$ w chwili $t = t_1 = t_2$.

Mierzymy długość tego samego pręta w ruchomym układzie A': $d' = x_2' - x_1'$ w chwili $t' = t_1' = t_2'$.

$$d' = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1 - \beta^2} < d \, . \tag{16}$$

Długość pręta w układzie poruszającym się jest mniejsza.

Jeśli potraktujemy teraz układ A' jako nieruchomy, to dojdziemy do wniosku, że **pręt ma największą długość w układzie w którym spoczywa**.

Spis treści

Dodawanie prędkości

Punkt P' porusza się w układzie A' z prędkością u'. Z kolei układ A' porusza się względem nieruchomego układu A z prędkością v wzdłuż osi x. **Jaka jest prędkość punktu P' w układzie A?**

$$u_i' = \frac{dx_i'}{dt'}, \quad u_i = \frac{dx_i}{dt}. \tag{17}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt} + v\frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)\frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u_x' + v}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{dt'}{dt}. \tag{18}$$

Na podstawie wzoru (10) mamy

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{1-\beta^2}, \tag{19}$$

Dodawanie prędkości

skąd ostatecznie

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} . \tag{20}$$

Postępując analogicznie, otrzymujemy że:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} , \tag{21}$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} . \tag{22}$$

Ze wzoru (20) wynika, że wypadkowa dwu prędkości jest mniejsza od sumy tych prędkości. Np. podstawiając $u'_x = c$ otrzymujemy $u_x = c$, czyli maksymalną prędkość fal elektromagnetycznych w próżni.

Spis treści

Niezmienniczość praw fizyki

Postulat Alberta Einsteina:

wszystkie prawa fizyki są niezmiennicze względem transformacji Lorentza

Spis treści

Równoważność masy i energii

Druga zasada dynamiki Newtona

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt}\,. \tag{23}$$

Praca tej siły na drodze ds wynosi

$$F\,ds = m\,v\,dv + v^2\,dm\,. \tag{24}$$

Różniczkując związek

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{25}$$

m_0 – masa spoczynkowa.

Równoważność masy i energii

Otrzymujemy

$$dm = \frac{mv\,dv}{c^2 - v^2}\,, \tag{26}$$

czyli

$$F\,ds = dm(c^2 - v^2) + v^2 dm = c^2 dm = d(m\,c^2)\,. \tag{27}$$

Praca elementarna powoduje ubytek energii potencjalnej, czyli

$$-\,dU = d(m\,c^2)\,. \tag{28}$$

Po scałkowaniu

$$E = mc^2 + U = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} + U = \text{const}\,, \tag{29}$$

E – energia całkowita ciała poruszającego się w polu sił.

Równoważność masy i energii

Rozwijając wyrażenie podpierwiastkowe w szereg, mamy

$$E = m_0 c^2 + \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^4} + \ldots \right) + U \,. \tag{30}$$

Przyjmując punkt odniesienia $U = 0$, otrzymujemy **prawo równoważności masy i energii**

$$E = m c^2 \,. \tag{31}$$

Jest to prawo zachowania energii ciała w polu sił zachowawczych.
Korzystając ze wzoru (30)

$$\begin{aligned} m = & \frac{E}{c^2} = m_0 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \ldots \right) + \frac{U}{c^2} \\ = & m_0 + m_{kin} + m_{pot} = \text{const} \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Zakończenie

Pokazano (Neil Ashby), że gdyby pominąć poprawki relatywistyczne, system nawigacyjny GPS nie mógłby działać. Zaniedbanie wpływu pola grawitacyjnego na upływ czasu spowodowałoby już po 24 godzinach błąd w określeniu położenia wynoszący 18 km.
Wielu autorów próbowało teorię względności zastąpić inną albo uogólnić. Obecna sytuacja jest taka, ze dopuszczalne (przez wyniki doświadczeń i obserwacji astronomicznych) uogólnienia różnią się w swoich przewidywaniach od teorii względności tak mało, że nie 'opłaca się' ich stosować (podobnie, jak 'nie opłaca się' stosować teorii względności w inżynierii). Teorie, które były alternatywne dla teorii względności, zostały przez doświadczenie wyeliminowane. Ale teoria względności jest też tymczasowa i kiedyś trzeba będzie zastąpić ją teorią dokładniejszą.

Literatura

1. P.G. Hewit, Fizyka wokół nas, PWN, 2006
2. J. Massalski, M. Massalska, Fizyka dla inżynierów, WNT, 1980
3. R. Wolfson, Essential University Physics, Pearson International Edition, 2007
4. A. Krasiński, Jak powstawała teoria względności, Postępy Fizyki, **54** 3, 95-106, 2003
5. S.L. Bażanski, Powstawanie i wczesny odbiór szczególnej teorii względności, Postępy Fizyki, I, **56**, 6, 253-261, 2005; II, **56**, 6, 263-268, 2005

Koniec? :-(

Koniec wykładu 12