Fizyka dla Informatyków
Wykład 10

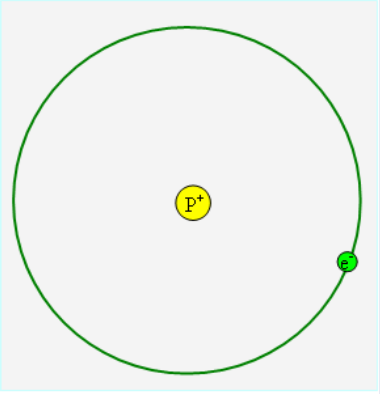
Elektrodynamika

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Dzisiaj będziemy opowiadać **o elektryczności.**
I o tym, i co z tego wynika!



Rys. 1: Model atomu wodoru

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Definicje

Jednostki wielkości elektromagnetycznych

Nazwa	Ozn.	Opis
Ładunek elektryczny	[C]	1 A·s
Elementarny ładunek elektryczny	[e]	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$[A·s]
Prąd elektryczny	[A]	wielkość podstawowa, stały prąd elektryczny w dwu ∞ - długich prostoliniowych równoległych przewodach o ∞ - małym kołowym przekroju w próżni w odległości od siebie 1m i działających na siebie z siłą $2 \cdot 10^{-7}$ niutona na metr
Natężenie pola elektrycznego	[E]	$[\mathrm{E}] = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{C}]} = \left[\frac{\mathrm{kg\ m\ s}^{-2}}{\mathrm{A \cdot s}}\right]$
Masa elektronu (spoczynkowa)	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg
Masa protonu (spoczynkowa)	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$ kg

Elektrostatyka to nauka o oddziaływaniu ładunków elektrycznych, nieruchomych względem wybranego układu współrzędnych.

Istnieją tylko dwa rodzaje ładunków elektrycznych: ujemny i dodatni. Ładunki jednoimienne odpychają się od siebie, a ładunki różnoimienne – przyciągają.

Prawo zachowania ładunku elektrycznego

Suma algebraiczna ładunków elektrycznych w izolowanym układzie jest wielkością stałą. W ciele obojętnym elektrycznie liczba ładunków ujemnych jest równa liczbie ładunków dodatnich.

Ładunek elektryczny dowolnego ciała jest sumą jego ładunków elementarnych.

Elektron

Najmniejsza stabilna cząstka elementarna posiadająca jednostkowy **ujemny** ładunek elementarny nazywana jest elektronem. Masa elektronu wynosi $9,1 \cdot 10^{-28}$g.

Proton

Najmniejsza stabilna cząstka elementarna posiadająca jednostkowy **dodatni** ładunek elementarny nazywana jest protonem. Masa protonu wynosi $1,67 \cdot 10^{-24}$g.

Prawo Coulomba

Siła $\mathbf{F}_{12}$ oddziaływania elektrostatycznego dwu punktowych ładunków elektrycznych q_1 i q_2 wynosi:

$$\mathbf{F}_{12} = k\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}_{12}}{r}\,, \tag{1}$$

$\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21}$;
k – współczynnik proporcjonalności, zależy od właściwości ośrodka;
$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$ – w układzie MKSA;
$k = \dfrac{1}{\varepsilon}$ – w układzie cgs;
$\varepsilon_0 = 8.5 \cdot 10^{-12}$ [C ^{2}/N $\cdot$ m^2] – stała elektryczna;
ε – względna przenikalność dielektryczna ośrodka, wskazuje ile razy w danym ośrodku siła oddziaływania ładunków zmniejsza się w porównaniu z próżnią.

Pole elektromagnetyczne

W **makroskopowej** teorii pola elektromagnetycznego (PEM) nie wnikamy w **mikroskopową** (atomową) strukturę materii – zakładamy ciągły rozkład materii. Właściwości PEM w każdym punkcie ciała określają parametry materiałowe:

- ε – przenikalność elektryczna
- μ – przenikalność magnetyczna
- σ – przewodnictwo właściwe

Najczęściej przyjmuje się, że nie zależą one od stanu pola.

Przyjmuje się również, że:

- $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ – gęstość ładunku elektrycznego
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ – gęstość prądu elektrycznego

To świadome ograniczenia zastosowania teorii.

James Clerk Maxwell (1831-1879)

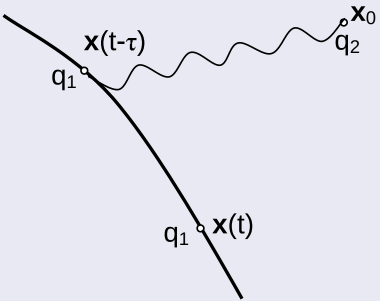
sformułował swoja teorię w 1864 r.

Jest to synteza wszystkich poprzednio znanych praw elektrodynamiki, a równocześnie jest jej daleko idącym uogólnieniem. Z jednego punktu widzenia opisuje elektrostatykę (opis pola nieruchomych ładunków), światło i fale radiowe.

Zamiast mówić, że ładunek punktowy q_1 działa na ładunek punktowy q_2 siłą daną wzorem Coulomba (Charles Coulomb, 1736 - 1806, sformułował swą teorię w 1785 r.), można powiedzieć, że ładunek q_1 wytwarza wokół siebie PEM, które z kolei działa na ładunek q_2, który również wytwarza wokół siebie PEM. Gdy ładunki są nieruchome, to tylko inny opis znanych faktów, nie wnosi to nowych aspektów fizycznych. Gdy ładunki poruszają się względem siebie, to sytuacja zmienia się radykalnie – pole zaczyna odgrywać istotną rolę, a wzór Coulomba przestaje wystarczać.

Prędkość światła $c \cong 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/\ s}$

Zmiana położenia ładunku q_1 wpływa na stan ładunku q_2 dopiero po upływie określonego czasu: pole nabiera fizycznego znaczenia – ładunek q_1 oddziałuje z polem, a później pole oddziałuje z ładunkiem q_2.



Rys. 2: Oddziaływanie ładunków przez pole

Równania Maxwella

Równania Maxwella mają kilka różnych sformułowań, ale zawsze uwzględniają dwa podstawowe pola:

- pole elektryczne **E**, i
- pole magnetyczne **H**.

Ponadto, jeśli pola te powstają w ośrodku materialnym, to pojawiają się jeszcze dwa pola:

- pole indukcji elektrycznej **D**, i
- pole indukcji magnetycznej **B**.

Pola te mają swoje źródła: pole elektryczne – ładunki elektryczne, a pole magnetyczne – prądy elektryczne, przy czym prądy elektryczne nie tylko wzbudzają pole, ale również pod wpływem pola powstają. W przewodnikach prądy mogą powstawać również pod wpływem różnicy koncentracji ładunków lub różnicy temperatur.

Równania Maxwella

Pojęcie 'ładunek punktowy' należy rozumieć analogicznie jak 'punkt materialny' w mechanice. Gęstości ładunków punktowych nie można opisać za pomocą ciągłej funkcji $\rho = \rho(\mathbf{x})$. Trudność tę omija się wprowadzając funkcjonał δ-Diraca, zdefiniowany wzorem

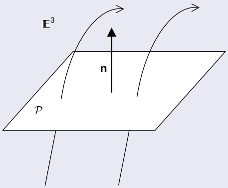
$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x+a)dx\,. \tag{2}$$

Czasem występują rozkłady ładunków wzdłuż krzywych (lub powierzchni)

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_C \lambda(s)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'(s))ds\,, \tag{3}$$

$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(s)$ – parametryczny opis krzywej, $\lambda(s)$ – gęstość liniowa ładunku.

Równania Maxwella



Rys. 3: Przepływ prądu przez płat $\mathcal{P}$

Natężenie prądu przepływającego przez płat $\mathcal{P}$ zapisuje się w postaci

$$J = \iint\limits_{\mathcal{P}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma \,. \tag{4}$$

Równania Maxwella

Wektor gęstości prądu $\mathbf{J}$ często przedstawia się w postaci

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(p)} + \mathbf{J}^{(z)}\,, \tag{5}$$

$\mathbf{J}^{(p)} = (\sigma)\mathbf{E}$ – prąd przewodzenia, $\mathbf{J}^{(z)}$ –niezależne prądy zewnętrzne, np. przy różnicy koncentracji ładunków ρ lub różnicy temperatur T

$$\mathbf{J}^{(z)} = -\alpha\,\mathrm{grad}\,\rho\,, \qquad \mathbf{J}^{(z)} = -\beta\,\mathrm{grad}\,T\,, \tag{6}$$

α – współczynnik dyfuzji, β – współczynnik termiczny.

Spis treści

Równania Maxwella – postać całkowa

1. Michael Faraday (1791-1867)

Prawo indukcji elektromagnetycznej ustalił doświadczalnie

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -\frac{d}{dt}\Phi \,, \tag{7}$$

Prawa strona oznacza szybkość zmian strumienia indukcji magnetycznej przepływającego przez powierzchnię S, lewa – siłę elektromotoryczną, która tym zmianom odpowiada. Jeśli zastąpić kontur zamkniętym obwodem elektrycznym, to popłynie w nim prąd o natężeniu zależnym od wartości siły elektromotorycznej oraz oporu obwodu. Kierunek indukowanego prądu jest taki, że pole przez niego wytworzone przeciwdziała zmianom strumienia indukcji Φ – metoda pomiaru pola elektrycznego.

Równania Maxwella – postać całkowa

2. Andre Marie Ampère (1775-1836), Hans Christian Oersted (1777-1851)

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \,, \tag{8}$$

Jest to uogólnienie prawa Ampère'a-Oersteda i zawiera najbardziej istotny element wprowadzony przez Maxwella do elektrodynamiki (dodał $\dot{\mathbf{D}}$).

Prąd całkowity

$$\mathbf{C} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} \,, \tag{9}$$

$\mathbf{C}$ – ozn. wprowadzone przez Maxwella (*current* - prąd): siła magnetomotoryczna jest generowana nie tylko przez prąd przewodnictwa $\mathbf{J}$, ale również przez prąd przesunięcia $\dot{\mathbf{D}}$ – w zmiennym polu elektrycznym zmiana w czasie strumienia indukcji elektrycznej przez powierzchnię S ma taki sam skutek jak przepływ przez te powierzchnię prądu elektrycznego.

Równania Maxwella – postać całkowa

3. Carl Friedrich Gauß(1777-1855) – prawo elektryczne

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, d\omega = Q\,, \tag{10}$$

całkowity ładunek Q w pewnym obszarze Ω równy jest strumieniowi indukcji elektrycznej $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ przepływającemu przez zamkniętą powierzchnię $\partial\Omega$ stanowiąca brzeg tego obszaru.

Równania Maxwella – postać całkowa

4. Carl Friedrich Gauß(1777-1855) – prawo magnetyczne

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0\,, \tag{11}$$

w przyrodzie nie występują pojedyncze bieguny magnetyczne.

Spis treści

Równania konstytutywne

W ośrodkach izotropowych, w ustalonym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{x},t) &= \varepsilon(\mathbf{x},t)\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \mu(\mathbf{x},t)\,\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,, \\ \mathbf{J}(\mathbf{x},t) &= \sigma(\mathbf{x},t)\,\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,, \quad \text{(prawo Georga Ohma, 1787-1854)} \end{aligned} \tag{12}$$

- $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ – przenikalność elektryczna ośrodka, $[\varepsilon] = \dfrac{[D]}{[E]} = \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, Farad $= \mathrm{C/V}$
- $\mu(\mathbf{x},t)$ – przenikalność magnetyczna ośrodka, $[\mu] = \dfrac{[B]}{[H]} = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$, Henr $= \mathrm{V\cdot s/A}$
- $\sigma(\mathbf{x},t)$ – przewodnictwo właściwe ośrodka, $[\sigma] = \dfrac{[J]}{[E]} = \dfrac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, Siemens $= \mathrm{A/V}$

Równania konstytutywne

W szczególności w próżni

- $\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} \mathrm{F/m}$ – przenikalność elektryczna próżni
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{H/m}$ – przenikalność magnetyczna próżni

Łatwo widać, że

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}}\,, \tag{13}$$

$c = 2,9978 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$ – prędkość światła w próżni.

W ośrodku materialnym

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_w\,, \qquad \mu = \mu_0\, \mu_w\,, \tag{14}$$

ε_w – względna przenikalność elektryczna, μ_w – względna przenikalność

Równania konstytutywne

ε_w, μ_w – wielkości bezwymiarowe.

Używane są również pojęcia

$$\chi = \varepsilon_w - 1\,, \qquad \kappa = \mu_w - 1\,, \tag{15}$$

χ – podatność elektryczna, κ – podatność magnetyczna.

Dielektryki – ośrodki nieprzewodzące $\varepsilon_w \geq 1$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_w \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\,. \tag{16}$$

P – wektor polaryzacji. Zjawisko polaryzacji powoduje, że w dielektryku pole elektryczne jest superpozycją dwu pól:

1. pola zewnętrznego, wytworzonego przez ładunki nie związane z dielektrykiem;
2. pola powstałego w rezultacie zmian zachodzących w dielektryku pod wpływem pól zewnętrznych, czyli właśnie polaryzacji ośrodka.

Równania konstytutywne

Magnetyki

Dla prawie wszystkich ośrodków $\mu_w \approx 1$.

- $\mu_w > 1$ – paramagnetyki
- $\mu_w < 1$ – diamagnetyki

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_w \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \kappa \mathbf{H} = \mu_0 \mu_w \mathbf{H} + \mathbf{M} \,. \tag{17}$$

$\mathbf{M}$ – wektor namagnesowania (magnetyzacji).

Trzecia grupa ośrodków – **ferromagnetyki**, w ramach teorii fenomenologicznej trudno ją opisać, bo nie uwzględniamy budowy dyskretnej materiału, czyli domen.

Spis treści

Równania Maxwella – postać różniczkowa

Postać różniczkowa równań Maxwella wynika z zastosowania twierdzeń Stokes'a i Gaussa-Ostrogradzkiego.

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\,, \\ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0\,, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\mathbf{D} = (\varepsilon)\mathbf{E}\,, \quad \mathbf{B} = (\mu)\mathbf{H}\,, \quad \mathbf{J} = (\sigma)\mathbf{E} + \mathbf{J}^{(z)}\,. \tag{19}$$

Oznaczenia

- **E** – wektor natężenia pola elektrycznego, $[E] = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \dfrac{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^3}$
- **D** – wektor indukcji elektrycznej, $[\mathbf{D}] = \dfrac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$
- **H** – wektor natężenia pola magnetycznego, $[\mathbf{H}] = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$
- **B** – wektor indukcji magnetycznej, $[\mathbf{B}] = \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2} = 1$ tesla
- Ψ – strumień pola indukcji elektrycznej, $[\Psi] = \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$
- Φ – strumień pola indukcji magnetycznej, $[\Phi] = \dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2} = 1$ weber

Pola EM niezależne od czasu

W zależności od tego, jak PEM zależą od czasu, mamy nstp. podział elektrodynamiki:

1. PEM statyczne: $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$, $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$
2. PEM stacjonarne: wszystko jak wyżej, ale $\mathbf{J} = \text{const} \neq \mathbf{0}$
3. PEM quasi-stacjonarne: pole jest w czasie wolnozmienne i można zaniedbać prąd przesunięcia, tzn. $\dot{\mathbf{D}} = 0$, ale $\dot{\mathbf{B}} \neq 0$ i $\mathbf{J} \neq 0$
4. Przypadek ogólny: zachodzą nierówności $\dot{\mathbf{D}} \neq 0$, $\dot{\mathbf{B}} \neq 0$, $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$ i trzeba stosować pełny układ równań Maxwella.

Pola EM niezależne od czasu

Pola statyczne

/	I	II
1.	$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$	$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$
2.	$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$	$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$
3.	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$

I – pole elektrostatyczne, II pole magnetostatyczne
Można je rozpatrywać niezależnie, ale przejście do innego inercjalnego układu odniesienia prowadzi do relacji $\tilde{\mathbf{J}} = \text{const} \neq \mathbf{0}$, czyli ze statycznego pole staje się tam stacjonarne.

Pola EM niezależne od czasu

Pola stacjonarne

	I	II
1.	$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0$	$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}$
2.	$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$	$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$
3.	$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$
4.	$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{(z)}$	

W wyniku $\mathbf{J} \neq 0$ zjawiska elektryczne wiążą się z magnetycznymi

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{(z)}\,. \tag{20}$$

Pola EM niezależne od czasu

Pola quasi-stacjonarne

	I	II
1.	$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0$	$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}$
2.	$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = \rho$	$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0$
3.	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
4.	$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{(z)}$	

Pola nie są niezależne, ale pojawia się tu indukcja elektromagnetyczna Faradaya. Przypadek ten jest jednak dobrym przybliżeniem dla zastosowań technicznych, w elektrotechnice i radiotechnice.

Pola EM niezależne od czasu

Pola quasi-stacjonarne

Zakładamy, że pola zmieniają się powoli, pomijamy efekty związane ze skończoną prędkością rozchodzenia się fal EM. EM falę płaską biegnącą wzdłuż osi x z prędkością c można przedstawić w postaci

$$E(x,t) = E_0 \exp\left\{ i\omega t - \frac{i\omega x}{c} \right\} . \tag{21}$$

Rozwijamy w szereg względem x

$$E(x,t) = E_0 \exp\left(1 - \frac{i\omega}{c} x + \ldots \right) \exp(i\omega t) . \tag{22}$$

Pola EM niezależne od czasu

Pola quasi-stacjonarne

Widać, że ograniczenia wynikające ze skończonej prędkości c można pominąć, jeśli

$$\frac{\omega}{c}x \ll 1\,. \tag{23}$$

Ponieważ $\omega/c = 2\pi/\lambda$, gdzie λ – długość fali, czyli

$$x \ll \lambda\,. \tag{24}$$

Wykorzystywany u nas prąd ma częstotliwość 50 Hz, więc długość fali odpowiadająca tej częstości wynosi $6 \cdot 10^3$ km, czyli efekty opóźnienia można zaniedbać nawet dla przyrządów elektrotechnicznych o wielkości państwa.

Koniec? :-(

Koniec wykładu 10