Elementy Modelowania Matematycznego
Wykład 9

Systemy kolejkowe

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Spis treści

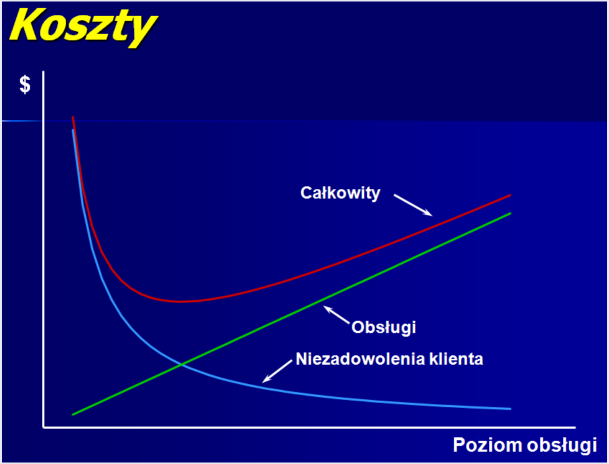
Wstęp

Teoria masowej obsługi, zwana także teorią systemów kolejkowych, zajmuje się budową modeli matematycznych, które można wykorzystać w racjonalnym zarządzaniu dowolnymi systemami działania, zwanymi systemami masowej obsługi.

Przykłady takich systemów:

- sklepy,
- porty lotnicze,
- systemy użytkowania samochodów w przedsiębiorstwie transportowym,
- stacje benzynowe itp.

Wstęp



Rys. 1: Zależności w systemie kolejkowym

Systemy masowej obsługi (SMO)

W systemie masowej obsługi (SMO) mamy do czynienia

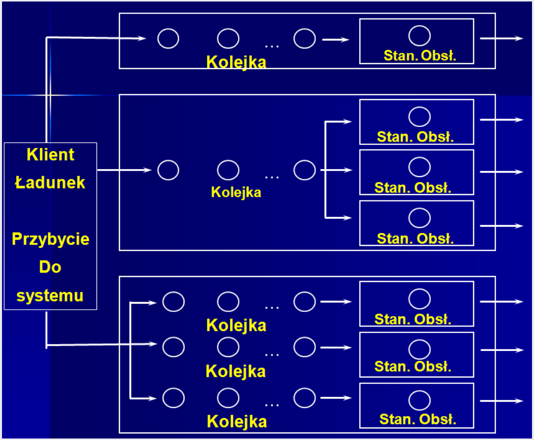
1. z napływającymi w miarę upływu czasu zgłoszeniami (np. uszkodzony pojazd, klient, statek
2. z kolejką obiektów oczekujących na obsługę
3. ze stanowiskami obsługi (np. stanowiska diagnozowania pojazdu, sprzedawca, stanowisko wyładunku)

Rozróżnia się systemy masowej obsługi:

- z oczekiwaniem;
- bez oczekiwania.

W SMO z oczekiwaniem zgłoszenie (obiekt zgłoszenia) oczekuje w kolejce na obsługę, zaś w systemie bez oczekiwania, wszystkie stanowiska obsługi są zajęte i obiekt zgłoszenia wychodzi z systemu nie obsłużony.

Systemy masowej obsługi (SMO)



Rys. 2: Przykład systemu kolejkowego

Systemy masowej obsługi (SMO)

Charakterystyki SMO:

- procent czasu zajętości wszystkich stanowisk obsługi
- prawdopodobieństwo, że system nie jest pusty
- średnia liczba czekających klientów
- średnia liczba klientów czekających i obsługiwanych
- średni czas czekania
- średni czas czekania i obsługi
- prawdopodobieństwo, że przybywający klient czeka
- prawdopodobieństwo, że w systemie jest n klientów

Procesy

Proces wejściowy

- intensywność strumienia wejściowego, intensywność przybywania;
- liczba klientów – trend;
- czas czekania na klienta.

Procesy

Proces obsługi

- Czas obsługi (bez czasu czekania w kolejce)
- Rozkład czasu obsługi, np. wykładniczy:

$$P(t_1 \leq T \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mu e^{-\mu x} dx = e^{-\mu t_1} - e^{-\mu t_2}, \text{ dla } t_1 < t_2$$

gdzie
μ – intensywność obsługi
średni czas obsługi $1/\mu$

Spis treści

Notacja Kendalla

System kolejkowy opisany jest 3 lub 4 parametrami: 1/2/3/4 oznaczającymi:

czas przybycia / czas obsługi / liczba stanowisk / liczba miejsc w systemie

- Parametr 1 — rozkład napływu
  M = Markowski (rozkład Poissona) czas przybycia
  D = Deterministyczny czas przybycia
- Parametr 2 — rozkład czasu obsługi
  M = Markowski (wykładniczy) czas obsługi
  G = Dowolny rozkład czasu obsługi
  D = Deterministyczny czas obsługi (jednopunktowy)
- Parametr 3 – liczba stanowisk obsługi
- Parametr 4 – liczba miejsc w systemie (łącznie stanowiska obsługi+ kolejka)
  Jeśli jest nieskończona jest pomijana w zapisie

System M/M/s

System M/M/s oznacza, że mamy:

- strumień wejściowy Poissona z parametrem λ
- obsługa wykładnicza z parametrem μ
- liczba stanowisk s
- dyscyplina obsługi FIFO
- pojedyncza kolejka
- $\lambda < s\,\mu$

System M/G/1

System M/G/1 oznacza:

- strumień wejściowy Poissona z parametrem λ
- czas obsługi o dowolnym rozkładzie, średniej μ i odchyleniu standardowym σ
- jedno stanowisko obsługi

Czas obsługi nie musi mieć rozkładu wykładniczego, np.:

- naprawa telewizora
- badanie wzroku
- fryzjer

System M/D/1

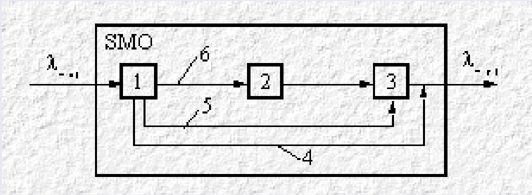
System M/D/1 oznacza, że czas obsługi może być ustalony. np. w przypadku

- taśmy produkcyjnej
- myjni automatycznej

Tak więc, czas obsługi jest deterministyczny.
Aby uzyskać system M/D/1 z systemu M/G/1, trzeba przyjąć odchylenie standardowe równe 0 ($\sigma = 0$)

Spis treści

Schemat systemu masowej obsługi (SMO)



Rys. 3: Schemat systemu masowej obsługi

1 - zgłoszenia (obiekty zgłoszenia), 2 – kolejka obiektów, 3 – stanowiska obsługi, 4 – przemieszczenia obiektów w systemie bez oczekiwania, 5 – przemieszczenia obiektów w systemie z priorytetem obsługi, 6 – przemieszczenia obiektu w systemie z oczekiwaniem, λ_{wej} – strumień wejściowy zgłoszeń, λ_{wyj} – strumień wyjściowy obsłużonych obiektów.

System masowej obsługi

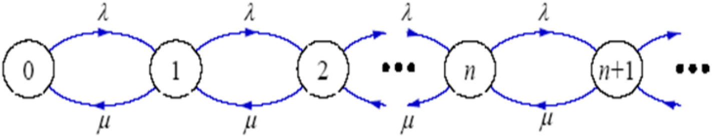
W zależności od dyscypliny obsługi SMO można podzielić następująco:

- **FIFO** (first in first out), czyli kolejność obsługi według przybycia;
- **SIRO** (selection in random order) czyli kolejność obsługi losowa;
- **LIFO** (last in first out), czyli ostatnie zgłoszenie jest najpierw obsłużone;
- priorytet dla niektórych usług (5), np. bezwzględny priorytet usługi oznacza, że zostaje przerwane aktualnie wykonywana obsługa obiektu, a na jego miejsce wchodzi obiekt z przyznanym priorytetem

Spis treści

Przykład systemu M/M/1

- **Charakterystyka systemu:**
  - napływ: proces Poissona z intensywnością λ
  - czas obsługi: rozkład wykładniczy z parametrem μ
  - procesy napływu i obsługi są niezależne
  - pojedyncze urządzenie obsługujące
  - nieskończona kolejka
- ***N*(*t*): stan systemu (liczba klientów) w chwili *t***



Spis treści

Założenia modelu matematycznego

Model matematyczny funkcjonowania SMO opiera się na teorii procesów stochastycznych.
W modelu tym występują następujące zmienne losowe:

1. czas upływający między wejściem do systemu dwóch kolejnych zgłoszeń;
2. czas obsługi jednego zgłoszenia przez stanowisko obsługi;
3. liczba stanowisk;
4. liczebność miejsc w kolejce zgłoszeń oczekujących na obsługę.

Założenia modelu matematycznego

Założenia modelu określają

1. typ rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych (rozkład deterministyczny – równe odstępy czasu), rozkład wykładniczy, rozkład Erlanga, dowolny rozkład;
2. zależność lub niezależność zmiennych losowych czasu czekania na zgłoszenie i czasu obsługi;
3. skończona lub nieskończona wartość liczby stanowisk obsługi, długości poczekalni;
4. obowiązującą w systemie dyscyplinę obsługi.

Założenia modelu matematycznego

W teorii systemów kolejkowych wyróżniamy:

- jednokanałowe systemy obsługi
- wielokanałowe systemy obsługi

Założenia modelu matematycznego

Kanał obsługi:

Kanał obsługi:

- stopa przybycia λ – przeciętna liczba klientów przypadająca na jednostkę czasu, ma rozkład Poissona;
- stopa obsługi μ – przeciętna liczba klientów obsłużonych w jednostce czasu, ma rozkład wykładniczy;
- liczba równoległych kanałów obsługi wynosi r;
- parametr intensywności ruchu ρ – stosunek liczby klientów przybywających do liczby klientów obsłużonych w jednostce czasu.

Założenia modelu matematycznego

rozpatrywane są tylko sytuacje w których klienci obsługiwani są według kolejności przybywania do punktu świadczącego usługę, zatem wszyscy klienci są traktowani na równi.

Rozpatruje się dwa przypadki:

1. Gdy układ zmierza do stanu równowagi, to $\lambda < r\mu$ (jeżeli obie wartości stałe) to prawdopodobieństwo tego, iż kolejka ma określoną długość, jest stałe w każdej jednostce czasu.
2. Gdy $\lambda \geq r\mu$, to układ jest niestabilny, a prawdopodobieństwo długiej kolejki rośnie (układ nie może nadrobić czasu w którym był chwilowo niewykorzystany).

Przykład 1

Na poczcie obok innych stanowisk jedno jest przeznaczone do obsługi wpłat i wypłat gotówkowych osób fizycznych. Ruch w godzinach 14-18 jest tak duży, że rozważa się możliwość uruchomienia dodatkowego stanowiska obsługi. Sprawdzić, czy jest to słuszna decyzja. Poniżej podano obserwacje poczynione w czasie jednej z godzin szczytowych.

Przykład 1

Numer klienta	Czas przyjścia liczony od przybycia poprzedniego klienta (w min)	Czas obsługi klienta (w min)	Numer klienta	Czas przyjścia liczony od przybycia poprzedniego klienta (w min)	Czas obsługi klienta (w min)
1	0	1,5	11	1	5,5
2	0,5	2,5	12	1,5	4,5
3	1	1	13	2	4
4	1,5	2	14	1,5	3
5	1	3	15	1	2
6	2,5	5	16	2,5	1,5
7	0,5	0,5	17	3	3
8	6	1,5	18	3,5	4
9	2	2,5	19	4	4
10	1,5	6	20	3,5	3
Razem				40	60

Przykład 1

Rozwiązanie

stopa przybycia $\lambda = \frac{20}{20} = 0.5$
stopa obsługi $\mu = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$
parametr intensywności ruchu $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{2} = 1.5$
Zatem zachodzi nierówność $\lambda > \mu$, czyli stopa przybyć przewyższa stopę obsługi. Wartość parametru $\rho > 1$ sugeruje, że mamy do czynienia z układem niestabilnym, a prawdopodobieństwo długiej kolejki się zwiększa.
Osiągnięcie stanu równowagi jest tylko możliwe dzięki podjęciu radykalnych działań: skróceniu czasu obsługi klienta lub zainstalowaniu dodatkowego stanowiska obsługi.

Trochę wzorów

Prawdopodobieństwo, że w układzie brak klientów, czyli n=0 obliczamy ze wzoru:

$$P(n=0)=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{r-1}\frac{\rho^i}{i!}+\frac{\rho^r}{(r-\rho)(r-1)!}}$$

Przeciętna liczba klientów oczekujących w kolejce to:

$$Q=\frac{\rho^{r+1}P(n=0)}{(r-\rho)^2(r-1)!}$$

Trochę wzorów

Prawdopodobieństwo, że w kolejce oczekuje n klientów

$$P(n) = \begin{cases} \dfrac{\rho^n P(n=0)}{n!} & \text{dla } n \leq r \\[2ex] \dfrac{r^{r-n}\rho^n P(n=0)}{r!} & \text{dla } n > r \end{cases}$$

Trochę wzorów

Prawdopodobieństwo, że w kolejce oczekuje więcej niż n0 klientów (pod warunkiem gdy $n_0 \geq r - 1$)

$$P(n > n_0) = \frac{r^{r-n_0} \rho^{n_0+1} P(n=0)}{(r-\rho)\, r!}$$

Trochę wzorów

Prawdopodobieństwo, że czas oczekiwania w kolejce jest dłuższy niż t_0:

$$P(t > t_0) = P(n > r - 1)e^{-\mu t_0 (r-\rho)}$$

Przykład 2

W prywatnej przychodni stomatologicznej czynne są dwa gabinety lekarskie. Przecięty czas przybycia pacjenta wynosi 3,8 na godz., a stopa obsługi wynosi 2 pacjentów na godz.
Czy system obsługi zmierza do stanu równowagi?

$$\lambda = 3.8 \quad \mu = 2 \quad r = 2 \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu\, r} = \frac{3.8}{2 \cdot 2} = 0.95$$

stan równowagi systemu jest zachowany, bo $3.8 < 4$

Przykład 2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie będzie kolejki?

$$P(n=0)=\frac{1}{1+0.95+\frac{(0.95)^2}{1.05\cdot 1}}=0.36$$

Prawdopodobieństwo, że nie będzie kolejki w tej poradni stomatologicznej wynosi 36%.

Przykład 2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjent będzie musiał oczekiwać?

$$P(n > 0) = \frac{2^{2-0} 0.95^{0+1} 0.36}{(2 - 0.95)\, 2!} = 0.64$$

Prawdopodobieństwo, że pacjent będzie musiał oczekiwać na przyjęcie w poradni wynosi 64%.

Przykład 2

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejce znajdują się więcej niż dwie osoby?

$$P(n > 2) = \frac{2^{2-2} 0.95^{2+2} 0.36}{(2 - 0.95)\, 2!} = 0.15$$

Prawdopodobieństwo, że w kolejce znajdują się więcej niż dwie osoby wynosi 15%.

Przykład 2

Ilu przeciętnie pacjentów oczekuje w kolejce na przyjęcie?

$$Q = \frac{0.95^{2+1}0.36}{(2-0.95)^2(2-1)!} = 0.28$$

Przeciętnie oczekuje w kolejce na przyjęcie 0.28 pacjentów.

Przykład 2

Jak wygląda sytuacja z punktu widzenia właściciela poradni? Sytuacja z punktu widzenia właściciela poradni dla pacjentów jest komfortowa. Wprawdzie prawdopodobieństwo bezkolejkowego przyjęcia jest duże, bo wynoszące 0,36. Małe jest prawdopodobieństwo oczekiwania w kolejce więcej niż dwóch pacjentów, bo wynoszące 0,15. Bardzo małe jest prawdopodobieństwo, że pacjent będzie czekał dłużej niż pół godziny, bo wynosi 0,11. Z analizy wynika, że przeciętnie w kolejce oczekuje 0,28 pacjentów.

Koniec?

Koniec wykładu 9