Elementy Modelowania Matematycznego
Wykład 8

Modele Markova

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Wstęp

Andrey Andreyevich Markov

Andrey Andreyevich Markov (⋆ 14 czerwca 1856 – † 20 czerwca 1922) wybitny rosyjski matematyk. Znany jest przede wszystkim ze swych prac na temat procesów stochastycznych, zwanych później łańcuchami Markova.

On i jego młodszy brat Vladimir Andreevich Markov (1871-1897) udowodnili tzw. Nierówność Markova. Jego syn, inny Andrey Andreevich Markov (1903-1979), był również wybitnym matematykiem, dokonując istotnych prac w dziedzinie konstruktywnej matematyki i teorii funkcji rekursywnych.

Wstęp

Procesy Markowa w reprezentacji dyskretnej lub ciągłej, jako wyodrębniona grupa procesów przypadkowych (losowych), są dziś najlepiej zbadaną dziedziną procesów losowych i znalazły zastosowanie w modelowaniu wielu zjawisk z życia codziennego

Wstęp

Proces Markova

Prognozowanie cen akcji giełdowych

Niemal wszystkie akcje zmieniają swoje ceny codziennie, a duża ich część w sposób niemal ciągły. Wykresy cen przedstawiają, w zależności od nastawienia obserwatora, efekt równoważenia się sił popytu i podaży, dyskontowanie przyszłych zdarzeń, reakcje na wydarzenia historyczne, efekt manipulacji akcjami, wpływ kosmosu bądź też całkowicie przypadkowe ruchy Browna. Te bądź jeszcze inne przyczyny zmian cen usiłuje się wykorzystać w analizie historycznych przebiegów i próbie prognozowania przyszłego zachowania cen.

Zachowanie poszczególnych akcji zapisane w postaci kolejnych cen i przekształcone do postaci graficznej to dla każdego inwestora wykres ceny. Bardzo podobne przebiegi i szeregi liczb są znane i używane w wielu dziedzinach nauki. Jako że szeregi te opisują za pomocą kolejnych liczb zachowanie pewnego zjawiska w czasie, bardzo często określa się je mianem szeregów czasowych. Kolejne zdarzenia występujące w szeregach czasowych tworzą pewien proces. Tak więc to, co dla inwestora jest wykresem cen, dla specjalisty zajmującego się na przykład teorią informacji, jest graficzną interpretacją szeregu czasowego opisującego proces zmian cen.

Wstęp

Proces Markova

Proces stochastyczny jest to takie zjawisko (reprezentowane liczbowo przez szereg czasowy), w którym przyszła wartość opisująca stan zjawiska nie jest pewna (przyszłe liczby opisujące je mogą przyjmować różne wartości, przy czym żadna z nich nie pojawi się z prawdopodobieństwem równym 1).

Klasycznymi przypadkami procesów stochastycznych są przyszłe wartości zmiennych opisujących pogodę (temperatura, ciśnienia czy kierunek bądź siła wiatru). Dobrym przykładem może być wypełnianie się niżu. Wiadomo, że kiedyś musi się wypełnić i przesunąć na wschód. Można nawet w pewien sposób oszacować drogę, którą się przesunie i czas potrzebny na podniesienie się ciśnienia wewnątrz niżu do wartości średniej. Nie da się tego jednak zrobić w sposób dokładny. Czyli mimo pewnych ściśle określonych ram zachowania, dokładne zachowanie nie jest znane. Podobnie jest ze zmianami cen na giełdzie. Jakkolwiek każdy silny spadek kiedyś musi się skończyć, nigdy nie mamy pewności kiedy to nastąpi.

Wstęp

Proces Markova

Ciąg Markowa to taki proces stochastyczny, w którym określone są związki probabilistyczne przyszłych zdarzeń w zależności od wcześniej występujących.

- ciąg Markova pierwszego rzędu – jutrzejsze zachowanie zależy (w sensie statystycznym) tylko i wyłącznie od dzisiejszej zmiany
- ciąg Markova drugiego rzędu – prawdopodobieństwo jutrzejszego zachowania zależy od dzisiejszej i wczorajszej zmiany
- ciąg Markova zerowego rzędu – jutrzejsze zachowanie jest całkowicie niezależne od wcześniejszych notowań (bez względu jakie było zachowanie historyczne przyszłe zmiany będą określone takimi samymi związkami prawdopodobieństw); właśnie takie założenie jest wykorzystywane w analizie portfelowej czyli fakt, że przyszłość nie zależy od przeszłości może być w jakiś sposób wykorzystany w procesie inwestycyjnym.

Wstęp

Proces Markova

Proces Markowa bazuje wyłącznie na rozkładzie prawdopodobieństw warunkowych. Może się więc zdarzyć, że mamy do czynienia z deterministycznym procesem chaotycznym, w którym jutrzejsze zachowanie określone jest ścisłym wzorem, a mimo to proces będzie sprawiał wrażenie, że jest zerowego rzędu (to znaczy zupełnie nie zależy od przeszłości). Wynika to z faktu, że bardzo podobne, niemal identyczne zachowanie historyczne może skutkować zupełnie różnym zachowaniem w przyszłości. Tak więc mimo tego, że proces chaotyczny oznacza się istnieniem tak zwanej długoterminowej pamięci zachowania wykrycie tej zależności może być trudne bądź niemożliwe.

Wstęp

Proces Markova

Najważniejszym problemem w prognozowania cen jest **brak stacjonarności procesu**. Niestacjonarność to zjawisko, które jest źródłem większości niepowodzeń inwestorów giełdowych, próbujących wyznaczyć przyszłe ceny akcji na giełdzie.

Proces stacjonarny to taki proces, w którym związki probabilistyczne są stałe i nie zależą od zmiennej niezależnej, czyli prawdopodobieństwo wystąpienia pewnej sytuacji nie zmienia się w miarę upływu czasu.

Gdyby przyjąć, że zachowanie cen akcji jest procesem niestacjonarnym o nieznanej zmianie sposobu zachowania oznaczałoby to, że do prognozowania przyszłych cen potrzebna byłaby wiedza o przyszłym charakterze tego procesu, natomiast zupełnie nieprzydatna byłaby wiedza o wcześniejszym zachowaniu. W skrócie oznacza to, że wyłącznie osoby manipulujące rynkiem (przy założeniu, że jest to możliwe na większą skalę) mogłyby posiadać wiedzę jak zarobić na inwestycjach giełdowych.

Wstęp

Proces Markova

Należy rozróżnić niestacjonarność procesu od efektywności rynku. Rynek efektywny, jest skutkiem tego, że zmiany cen są procesem Markowa zerowego rzędu. Dodatkowo, charakteryzuje go tak zwana słaba stacjonarność, która cechuje się stałością średniej i wariancji. Czyli ostatecznie na rynku efektywnym ceny nie zależą od wcześniejszych. Natomiast w przypadku braku stacjonarności ceny zależą od poprzednich, lecz nie ma pewności, że wiemy w jaki sposób.

W praktyce sprawa nie jest taka beznadziejna. Zmiany cen nie są procesem stacjonarnym, jednak zmienność zależności jest bardzo powolna. To znaczy system, który był dobry wczoraj będzie dobry jeszcze dzisiaj, a jutro będzie tylko trochę gorszy. Kiedyś oczywiście może utracić swoje właściwości. Ponadto można podejrzewać, że zmiany cen składają się z kilku (zapewne trzech) procesów o różnych charakterach. Bardzo prawdopodobne, że przynajmniej jeden z nich jest stacjonarny, czyli jego parametry ustalone w przeszłości będą w przyszłości takie same.

Wstęp

Proces Markova

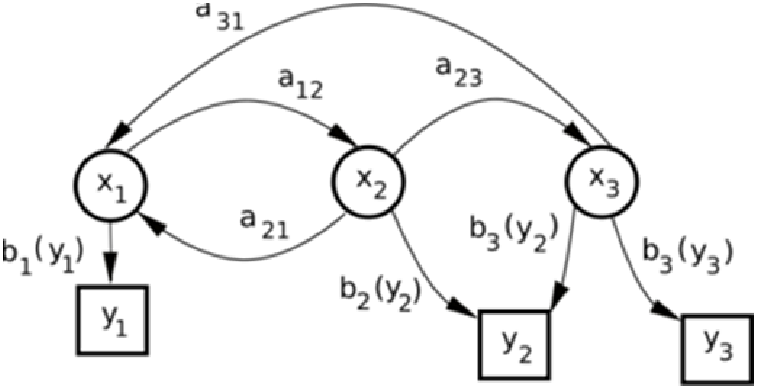
Niech układ Ω może przyjmować stany $\omega_1, \omega_2, \ldots$ – zbiór skończony lub przeliczalny i niech w pewnej jednostce czasu może przejść z jednego stanu do innego z pewnym prawdopodobieństwem, to

$$P(\omega_j^{(n)}|\omega_i^{(n-1)}) \qquad (\star)$$

prawdopodobieństwo warunkowe, że układ znajdujący się w chwili $n-1$ w stanie ω_i przejdzie do stanu ω_j w chwili n. Przejścia układu tworzą **łańcuch Markova** jeśli prawdopodobieństwo $(\star)$ od stanów poprzednich.

Wstęp

Proces Markova



Rys. 1: Przykład procesu Markowa

Łańcuchy Markova

Łańcuch jednorodny

Jeśli prawdopodobieństwo nie zależy od czasu, tzn.:

$$P(\omega_j^{(n)}|\omega_i^{(n-1)}) = P(\omega_j^{(n+1)}|\omega_i^{(n)})$$

to łańcuch Markova jest **jednorodny**, a macierz złożona z elementów

$$p_{ij} = P(\omega_j^{(n)}|\omega_i^{(n-1)})$$

to **macierz przejścia**. Mamy $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$.

Łańcuchy Markova

Prawdopodobieństwo, że w n przejściach układ przejdzie ze stanu ω_i do stanu ω_j wynosi

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(m)\, p_{kj}(n-m)$$

m – liczba całkowita, $1 \leq m < n$.

Przykład łańcucha Markova: proces urodzin i śmierci — zmiana liczebności populacji na skutek narodzin i śmierci.

Łańcuchy Markova

Łańcuch pochłaniający

Łańcuch Markova nazywamy **pochłaniającym**, jeśli istnieje taki stan i, z którego nie można wyjść, czyli:

$$p_{ii} = 1 \quad \wedge \quad \forall_{i \neq j} \, p_{ij} = 0$$

Stan taki nazywamy stanem pochłaniającym (ang. *absorbing state*). Stan nie będący stanem pochłaniającym nazywamy stanem przejściowym (ang. *transient state*).

Łańcuchy Markova

Postać kanoniczna łańcucha pochłaniającego

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Q – macierz tranzytywna
0 – macierz zerowa
I – macierz identycznościowa
R – macierz przejścia do stanów pochłaniających

Łańcuchy Markova

Łańcuchy ergodyczne

Łańcuch Markowa nazywamy **ergodycznym**, jeśli z dowolnego stanu można przejść do dowolnego innego (niekoniecznie w jednym kroku).

Procesy ergodyczne

Centralnym zagadnieniem teorii procesów stochastycznych jest znalezienie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $y(t)$ w pewnej chwili t na podstawie znajomości realizacji $y(s)$ tej zmiennej losowej w pewnych innych chwilach s (na ogół chwila t odnosi się do „przyszłości”).

Procesy ergodyczne

Jedną z podstawowych własności, dzięki którym można ocenić rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $y(\mathrm{t})$ na podstawie obserwacji aktualnych przebiegów danego procesu stochastycznego, jest tzw. własność ergodyczności; można powiedzieć, że proces stochastyczny jest ergodyczny, jeżeli prawdopodobieństwo zaobserwowania wartości $y(t)$ należącej do jakiegoś zbioru A da się oszacować przez średni czas „pobytu" każdej realizacji w tym zbiorze podczas długiego czasu obserwacji; tak więc w procesach stochastycznych ergodycznych można oszacować ich rozkład prawdopodobieństwa na podstawie obserwacji jednego przebiegu w dostatecznie długim czasie, czyli otrzymane wyniki są średnią po czasie.

Procesy ergodyczne

Hipoteza ergodyczna

Ewolucja klasycznego złożonego układu dynamicznego zachodzi z jednakowym prawdopodobieństwem przez wszystkie stany, które są dostępne z punktu początkowego i które podlegają ograniczeniom narzuconym przez zasadę zachowania energii.

Procesy Markova

Jeszcze raz: procesy Markova to takie procesy stochastyczne, w których znajomość wartości realizacji w pewnej chwili t pozwala na wyznaczenie związków probabilistycznych dla tej realizacji w chwilach przyszłych (tj. rozkładu prawdopodobieństwa dla chwil późniejszych od chwili t), a dodatkowe informacje o wartościach wcześniejszych niż t nie pozwalają wyciągać żadnych dodatkowych informacji co do przyszłości; innymi słowy, *są to procesy realizowane przez układy zapominające przeszłość*.

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

- Proces emisji cząstek wypromieniowanych przez substancję radioaktywną.
- Ruch cząstki zawieszonej w cieczy — tzw. ruch Browna.
- Proces zajmowania i zwalniania łączy w centrali telefonicznej.
- Dynamika kolejki w serwerach WWW.

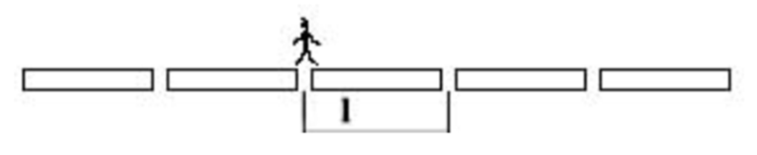
Przykładem procesu *niemarkovskiego* może być np. proces zmian poziomu wody w rzece w pewnym ustalonym jej miejscu, gdzie informacja o tym, że w pewnej chwili t poziom wody wynosił y i bezpośrednio przedtem obserwowano np. tendencję obniżania się poziomu wody, pozwala na lepsze przewidywania niż sama informacja o tym, że w chwili t poziom wody wynosił y.

Spis treści

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Błądzenie losowe: prawdopodobieństwo znalezienia układu w n-tym stanie zależy tylko od stanu poprzedniego $n-1$.



Rys. 2: Losowe błądzenie pijaka: p - prawdopodobieństwo, że pijak pójdzie w lewo; $q = 1 - p$ - prawdopodobieństwo, że pijak pójdzie w prawo; $x = m\,l$ – lokalizacja pijaka wzdłuż osi x

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Pytanie: jakie jest prawdopodobieństwo, że po wykonaniu N kroków znajdziemy pijaka w położeniu $x = m\,l$?

Niech po n krokach pijak będzie w położeniu $x = m\,l$, $m \leq N$. Niech n_r - liczba kroków w prawo; n_l - liczba kroków w lewo. Mamy więc

$$N = n_r + n_l$$

$$m = n_r - n_l = n_r - (n - n_r) = 2n_r - N$$

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Przypomnienie: rozkład dwumianowy

Prawdopodobieństwo, że pijak pokonał pewną drogę wynosi

$$p \dots p\, q \dots q = p^{n_r}\, q^{n_l}$$

Liczba realizacji takich dróg wynosi

$$\frac{N!}{n_r!\, n_l!}$$

więc prawdopodobieństwo wykonania n_r kroków w prawo i n_l kroków w lewo wynosi

$$P_N = \frac{N!}{n_r!\, n_l!}\, p^{n_r}\, q^{n_l}$$

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Przyjmijmy

$$n_r = \frac{1}{2}(N+m), \qquad n_l = \frac{1}{2}(N-m)$$

i wstawmy do wzoru na P_N

$$P_N(m) = \frac{N!}{\frac{1}{2}(N+m)!\,\frac{1}{2}(N-m)!}p^{(N+m)/2}q^{(N-m)/2}$$

Szczególny przypadek $p = q = 1/2$:

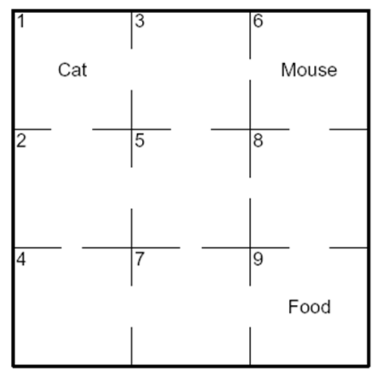
$$P_N(m) = \frac{N!}{\frac{1}{2}(N+m)!\,\frac{1}{2}(N-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

Spis treści

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Mysz w labiryncie



Rys. 3: Mysz jest w labiryncie o dziewięciu komórkach: w komórce 9 jest jedzenie, a 6 kot; jeśli kot ja złapie to ja zje, a jeśli mysz dotrze do 9 to sie naje

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Mysz w labiryncie

Mamy kilka możliwości:

- Kot zawsze siedzi w swojej komórce i czeka na ofiarę
- Kot może wchodzić tylko do pomieszczeń 1,2,3 i 5, gdyż wszystkie inne otwory są dla niego za małe; do każdego sąsiedniego dopuszczalnego pomieszczenia wchodzi z jednakowym prawdopodobieństwem
- To samo co powyżej, ale prawdopodobieństwo, ze zostanie w swej komórce wynosi $\frac{1}{2}$, a wchodzi do sąsiednich pomieszczeń z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$

Spis treści

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Procesy gałązkowe (Galtona-Watsona)

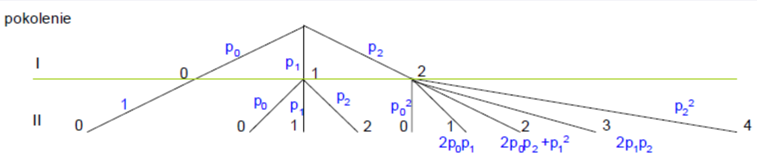
Procesy gałązkowe modelują rozwój populacji (jednopłciowej, rozmnażającej się przez podział, np. bakterii, ameb, monet czy innych mikroorganizmów). Zmienne losowe $y(n)$ (przyjmujące nieujemne wartości) określają liczbę osobników w n-tym pokoleniu. Przyjmujemy zawsze, że jest jeden „protoplasta rodu”, czyli $y(0) = 1$. Zmienne losowe opisujące, ile dzieci ma każdy osobnik, są niezależne o jednakowym rozkładzie. Główne pytanie, jakie się pojawia, to: jakie są szanse, że dana populacja przeżyje?

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Procesy gałązkowe (Galtona-Watsona)

Załóżmy, iż osobnik może mieć 0, 1 lub 2 potomków, a przez p_0, p_1 i p_2 oznaczmy prawdopodobieństwa tych zdarzeń ($p_0 + p_1 + p_2 = 1$).



Rys. 4: „Drzewo” procesu dla dwóch pokoleń

Procesy Markova

Przykłady procesów Markova

Procesy gałązkowe (Galtona-Watsona)

Niech x_k – liczba osobników k-tej generacji. Wtedy prawdopodobieństwo pojawienia się określonej liczby osobników danej generacji można zapisać:

$$
\begin{array}{ll}
p(x_0 = 1) = 1 & \\
p(x_1 = 0) = p_0 & p(x_1 = 1) = p_1 \\
p(x_1 = 2) = p_2 & \\
p(x_2 = 0) = p_0 + p_0 p_1 + p_2 p_0^2 & p(x_2 = 1) = p_0 + 2 p_2 p_1 p_0 \\
p(x_2 = 2) = p_1 p_2 + p_2(2 p_0 p_2 + p_1^2) & p(x_2 = 3) = 2 p_2^2 p_1 \\
p(x_2 = 4) = p_2^3 &
\end{array}
$$

Jeśli potraktujemy x_k jako zmienną losową, to możemy wyznaczyć jej wartość oczekiwaną ($E(X_k) = \mu$).

Spis treści

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

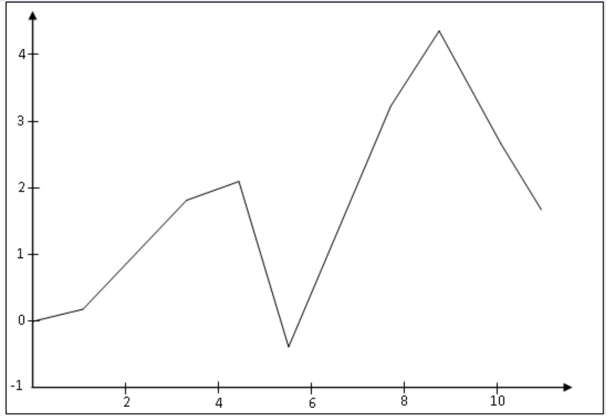
Błądzenie losowe (*random walk*)

$$B(t+1) = B(t) + z(t+1), \qquad B(0) = B_0$$

$z(t)$ – zakłócenie losowe opisane ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancji 1
t – czas mierzony w jednakowych dyskretnych odstępach
Gdy $t = 0$ – teraźniejszość. Niech $B(0) = 0$, a przyrost czasy $\Delta = \frac{1}{n}$, n – dowolna liczba naturalna.

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

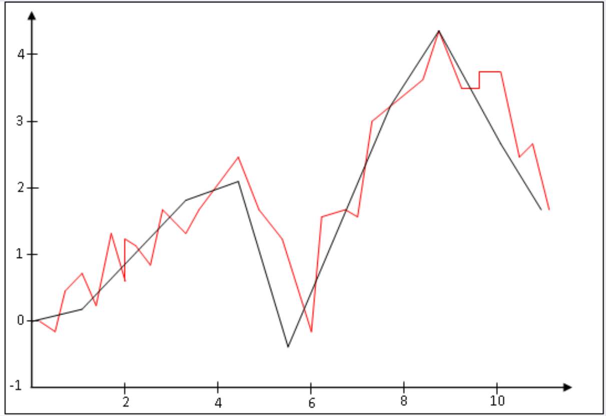
Błądzenie losowe



Rys. 5: Trajektoria błądzenia losowego obserwowanego co 1 jednostkę czasu

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe



Rys. 6: Trajektoria błądzenia losowego obserwowanego co 1 jednostkę czasu i co 0.2 jednostki czasu

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe

Dla nowych jednostek czasu

$$B(t+\Delta) = B(t) + z(t+\Delta), \qquad B(0) = B_0$$

Zmieniła się wariancja (zmienność) zakłócenia losowego $z(t)$, a mianowicie $z(t)$ jest teraz ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $N(0,\Delta)$. Nowy proces ma takie samo średnie przesunięcie (dryf) i wariancję na przedziale o długości n odstępów (okresów), jak i wyjściowe błądzenie losowe obserwowane na jednostkowym przedziale.
Co się stanie, gdy Δ staje się nieskończenie małą wielkością, czyli dt?

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe

Formalnie mamy

$$B(t+dt) = B(t) + z(t+dt), \qquad B(0) = B_0$$

Zakłócenie losowe jest teraz opisane procesem stochastycznym $z(t)$ z czasem ciągłym, złożonym ze zmiennych losowych niezależnych i o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0, dt)$, zwanym **białym szumem** (*white noise*). Z powyższego wzoru wynika natychmiast, że

$$z(t+dt) = B(t+dt) - B(t) = dB(t)$$

Różniczka stochastyczna $dB(t)$ jest identyfikowana z jedną zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(0, dt)$.

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe

Z przeprowadzonej konstrukcji wynikają następujące własności tego procesu:

- $\mathbb{E}[dB(t)] = 0$ – średnia gaussowskiej zmiennej losowej, tzn. o rozkładzie normalnym, jest równa zeru
- $\mathbb{E}[dB(t)dt] = \mathbb{E}[dB(t)]dt = 0$ – konsekwencja liniowości operatora $\mathbb{E}$ wartości oczekiwanej i własności pierwszej
- $\mathbb{E}[dB(t)^2] = dt$ – wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej jest równa jej wariancji: ogólny fakt dla zmiennych losowych o wartości oczekiwanej równej zero

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe

- $\mathrm{Var}\mathbb{E}[dB(t)^2] = \mathbb{E}[dB(t)^4] - \mathbb{E}^2[dB(t)^2] = 3dt^2 - dt^2 = 0$ – wniosek z postaci czwartego momentu centralnego dla gaussowskich zmiennych losowych oraz z faktu, że dla nieskończenie małych przyrostów ich kwadrat jest równy zeru
- $\mathbb{E}[(dB(t)dt)^2] = \mathbb{E}[dB(t)^2]dt^2 = 0$ – konsekwencja właściwości drugiej i trzeciej
- $\mathrm{Var}[dB(t)dt] = \mathbb{E}[dB(t)dt^2] - \mathbb{E}^2[dB(t)dt] = 0$ – konsekwencja właściwości drugiej i piątej
- $\mathbb{E}[f(dB)] = f(dB)$, jeśli $\mathrm{Var}[f(db)] = 0$ – wniosek z właściwości czwartej i szóstej dla dowolnej mierzalnej funkcji f

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Błądzenie losowe

Z wymienionych właściwości wynikają następujące podstawowe prawa mnożenia różniczki stochastycznej:

- $dB(t)^2 = dt$
- $dB(t)dt = 0$
- $dt^2 = 0$

Spis treści

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Ruch Browna

Proces stochastyczny $B(t)$ nazywamy standardowym ruchem Browna (*Brownian motion*). Jest to jeden z ważniejszych modeli teoretycznych w rachunku prawdopodobieństwa. Nazwa pochodzi od dobrze znanego w fizyce procesu opisującego położenie cząstki w klasycznym ruchu Browna. Możemy go przedstawić w następującej postaci całkowej:

$$B(t) = B_0 + \int_0^t dB(s)$$

lub równoważnie w postaci różniczkowej pokazanej poprzednio. podstawowe własnoścpi rocesu ruchu Browna:

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Ruch Browna

Podstawowe właściwości procesu ruchu Browna:

- prawie wszystkie realizacje $B(t)$ są ciągłe
- $B(t)$ jest procesem o przyrostach stacjonarnych i niezależnych
- przyrosty procesu $B(t)$ mają rozkład normalny $N(0, dt)$
- rozkłady warunkowe $B(u)$ przy danym $B(t)$ są normalne o rozkładzie $N(b(t), u - t)$, dla $u > t$
- wariancja $\mathrm{Var}[B(u)] \to \infty$, gdy $u \to \infty$

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Ruch Browna

Ruch Browna był po raz pierwszy wykorzystany do modelowania procesów finansowych przez **Louisa Bacheliera**, który w swojej pionierskiej pracy doktorskiej *Thèorie de la spéculation*, obronionej 29 marca 1900 r. w Paryżu, zaproponował pierwszy teoretyczny model procesu ceny akcji z paryskiej giełdy. Dopiero po pracach Alberta Einsteina z 1905 r. i Mariana Smoluchowskiego z 1907 r. proces Browna na stałe wszedł do fizyki, a później dzięki pracom Norberta Wienera z 1923 r. i Paula Lévy'ego z 1939 r. – również do matematyki, stając się jednym z najważniejszych modeli procesów losowych. Okazało się jednak, że w modelowaniu stochastycznym procesów finansowych sam proces ruchu Browna jest mało użyteczny, natomiast przydają się procesy stochastyczne będące pewnymi jego modyfikacjami.

Zastosowanie procesów Markova w inżynierii finansowej

Ruch Browna

Typowa modyfikacja:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \qquad X(0) = X_0$$

Powyższe równanie można otrzymać przez aproksymację z błądzenia losowego z uogólnionym dryfem i zmienną wariancją

$$X(t+1) = X(t) + \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)z(t+1)$$

$X(0) = X_0$, $z(t)$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $N(0, 1)$.

Literatura

[1] B. Filipowicz: Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996, s. 27

[2] J. Kałuski, Wykłady z procesów Markowa, Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, 2007

[3] M. Wierzbicki, Prognozowanie cen - kilka trudnych pojęć, http://www.motte.pl

[4] A. Weron, R. Weron, Inżynieria finansowa, WNT, 1999

Koniec?

Koniec wykładu 8