Elementy Modelowania Matematycznego
Wykład 6

Metoda simpleks

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Wstęp

Omówimy algorytm simpleksowy, inaczej metodę simpleks(ów). Jest to stosowana w matematyce iteracyjna metoda rozwiązywania zadań programowania liniowego za pomocą kolejnego polepszania (optymalizacji) rozwiązania. Nazwa metody pochodzi od simpleksu, figury wypukłej będącej uogólnieniem trójkąta na więcej wymiarów.

Wstęp

W przestrzeni euklidesowej:

1. Simpleks zerowymiarowy to punkt
2. Simpleks jednowymiarowy to odcinek
3. Simpleks dwuwymiarowy to trójkąt
4. Simpleks trójwymiarowy to czworościan (niekoniecznie foremny)
5. Simpleks czterowymiarowy to 5-komórka

Standardowe zadanie programowania liniowego

Rozważamy proces, w którym występują zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$, na które nakładamy ograniczenia zapisane w postaci układu równań

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

a_{ij}, b_i – znane współczynniki.
Dopuszczamy jedynie nieujemne wartości x_j i b_i czyli:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Z procesem jest związana funkcja celu Z:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n$$

c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ – znane współczynniki.

Zadanie polega na maksymalizacji (minimalizacji) funkcji celu Z, spełniającej nałożone ograniczenia na zmienne.

Standardowe zadanie programowania liniowego

Model matematyczny:

$$\text{FC: } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\text{O: } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \ldots, n \\ b_i \geq 1 & i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Bardzo powszechną w zagadnieniach praktycznych odmianą ograniczeń są ograniczenia w postaci nierówności. To również, są zagadnienia programowania liniowego, ale nie w postaci standardowej.

Standardowe zadanie programowania liniowego

Przykład

Zakład zamierza rozpocząć produkcję dwóch wyrobów: F1 i F2. Wśród środków produkcyjnych, które zostaną użyte w procesie produkcji dwa są limitowane. Limity te wynoszą: dla środka pierwszego S_1 63 kilogramów, dla środka drugiego S_2 64 kilogramy. Aby wyprodukować jednego wyrób F1 potrzeba 9 kg środka S_1 oraz 8 kg środka $_2$. Aby wyprodukować jeden wyrób F2 potrzeba 7 kg środka S_1 oraz 8 kg środka S_2. F1 będą produkowane jednocześnie na 3 maszynach, a F2 na 2 maszynach. Koszty przestrojenia maszyn zwrócą się po wyprodukowaniu łącznie 6 sztuk wyrobów. Wiedząc, że cena F1 będzie wynosić 6 zł, a cena F2 5 zł określić wielkość produkcji, która zoptymalizuje zysk ze sprzedaży.

Standardowe zadanie programowania liniowego

Przykład

		F_1	F_2	
①	S_1	9	7	63
②	S_2	8	8	64
③	ilość maszyn	3	2	6
	cena	6	5	

Rys. 1: Podsumowanie zadania z Przykładu

Standardowe zadanie programowania liniowego

Przykład

Zmienne decyzyjne: x_1 – wielkość produkcji F1; x_2 – wielkość produkcji F2

Funkcja celu (FC): $Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

Ograniczenia (O):

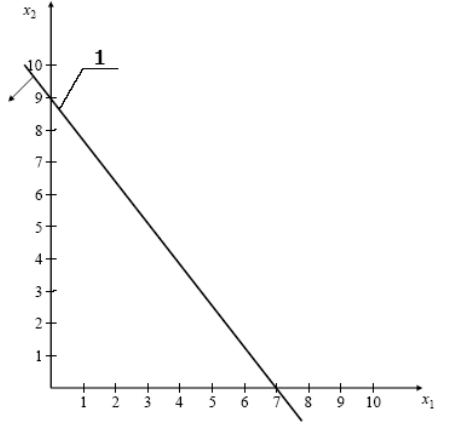
$$\begin{array}{ll} (1) & 9x_1 + 7x_2 \leq 63 \\ (2) & 8x_1 + 8x_2 \leq 64 \\ (3) & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{array}$$

Warunki brzegowe (WB):

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

Standardowe zadanie programowania liniowego

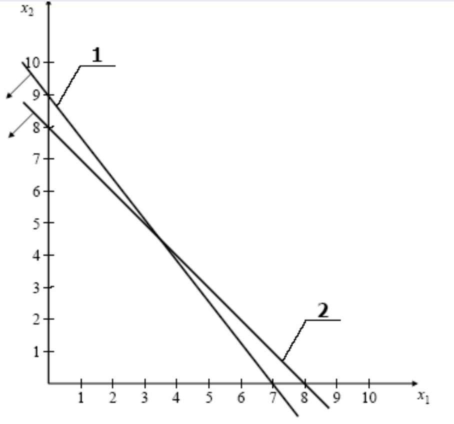
Metoda geometryczna



Rys. 2: Ograniczenie (1)

Standardowe zadanie programowania liniowego

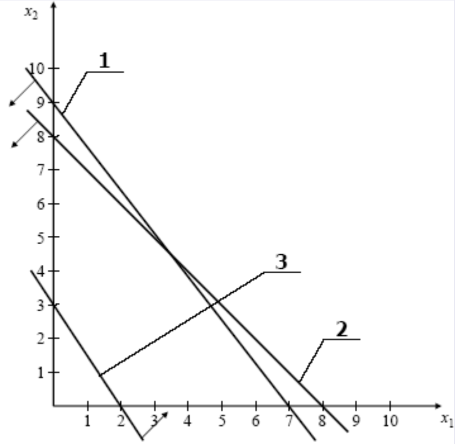
Metoda geometryczna



Rys. 3: Ograniczenie (2)

Standardowe zadanie programowania liniowego

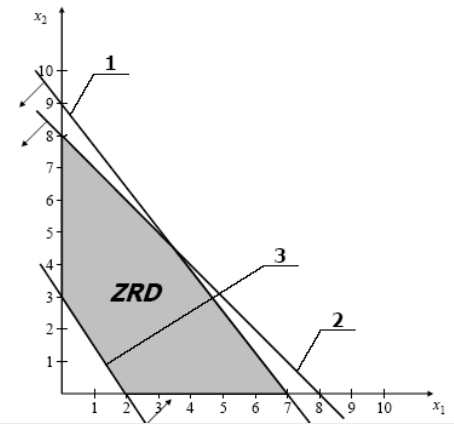
Metoda geometryczna



Rys. 4: Ograniczenie (3)

Standardowe zadanie programowania liniowego

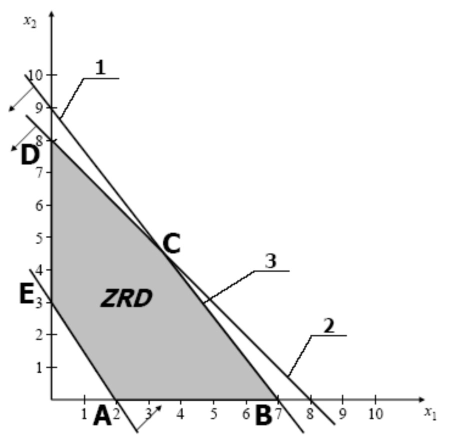
Metoda geometryczna



Rys. 5: Analiza (1)

Standardowe zadanie programowania liniowego

Metoda geometryczna



Rys. 6: Analiza (2)

Standardowe zadanie programowania liniowego

Metoda geometryczna – analiza wyników

$$A(2,3) \qquad Z(2,0) = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 12$$

$$B(7,0) \qquad Z(7,0) = 6 \cdot 7 + 5 \cdot 0 = 42$$

$$C(3.5,4.5) \qquad Z(3.5,4.5) = 6 \cdot 3.5 + 5 \cdot 4.5 = 43.5 \rightarrow \max$$

$$D(0,8) \qquad Z(0,8) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 40$$

$$D(0,3) \qquad Z(0,3) = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 15$$

Odpowiedź: Aby zysk był maksymalny, należy wyprodukować 3.5 F1 oraz 4.5 F2.

Standardowe zadanie programowania liniowego

Sprowadzenie modelu do postaci bazowej

Ograniczenie (1) $9x_1 + 7x_2 \leq 63$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia:

$$9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63$$

x_3 – zmienna bilansująca określa ilość środka S_1 jaki nie zostanie wykorzystany w procesie produkcji.

Standardowe zadanie programowania liniowego

Sprowadzenie modelu do postaci bazowej

Ograniczenie (2) $x_1 + x_2 \leq 8$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia (podobnie jak dla (1)):

$$x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

x_4 – zmienna bilansująca określa ilość środka S_2 jaki nie zostanie wykorzystany w procesie produkcji. Dla $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ mamy: $x_4 = 8 \geq 0$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Sprowadzenie modelu do postaci bazowej

Ograniczenie (3) $3x_1 + 2x_2 \geq 6$

Aby otrzymać ograniczenie w postaci równania wprowadzamy dodatkową zmienną do ograniczenia (podobnie jak dla (1) i (2)):

$$3x_1 + 3x_2 - x_5 = 6$$

x_5 – zmienna bilansująca. Dla $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$ mamy: $x_5 = -6 < 0$

W postaci bazowej, w każdym ograniczeniu musi znajdować się jedna zmienna, która po wyzerowaniu wszystkich pozostałych zmiennych w ograniczeniu, jest nieujemna. Wprowadzamy zatem kolejną zmienną:

$$3x_1 + 3x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

x_6 – zmienna sztuczna. Dla $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_5 = 0$ mamy: $x_6 = 6 \geq 0$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Sprowadzenie modelu do postaci bazowej

- Rozwiązanie zadania po wprowadzeniu zmiennej sztucznej nie jest równoważne z rozwiązaniem zadania początkowego.
- Byłoby równoważne tylko wtedy, gdyby w rozwiązaniu optymalnym zmienna sztuczna miała wartość zero.
- Aby zapewnić $x_6 = 0$ w rozwiązaniu optymalnym, zmienną sztuczną wprowadza się do funkcji celu.
- Współczynnik przy zmiennej sztucznej w funkcji celu dobiera się tak, aby niezerowa wartość tej zmiennej mocno pogarszała wartość funkcji celu.

$$\text{FC: } Z(x_1, x_2, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + M\,x_6 \rightarrow \max$$

$M = -1000$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Sprowadzenie modelu do postaci bazowej

Wszystkie zmienne bilansujące również wprowadzamy do funkcji celu, ale współczynniki przy zmiennych bilansujących w funkcji celu mają wartość równą zero.

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \longrightarrow \max$$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Postać bazowa

Funkcja celu (FC):

$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1000x_6 \longrightarrow \max$

Ograniczenia (O):

$$\begin{aligned} (1) \quad & 9x_1 + 7x_2 + x_3 = 63 \\ (2) \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ (3) \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 6 \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (WB):

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,\ \ x_6 \geq 0$

Standardowe zadanie programowania liniowego

Postać bazowa

- Wszystkie ograniczenia w postaci równań
- W każdym ograniczeniu znajduje się zmienna, która po wyzerowaniu pozostałych zmiennych ma wartość nieujemną
- Współczynnik przy zmiennej sztucznej ma wartość 1
- Wprowadzone zmienne bilansujące wprowadza się do funkcji celu z zerowymi współczynnikami
- Wprowadzone zmienne sztuczne uwzględnia się w funkcji celu ze współczynnikami mocno pogarszającymi jej wartość