Elementy Modelowania Matematycznego
Wykład 11

Modelowanie metodami teorii gier II

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Wstęp

Pojęcie równowagi Nasha często występuje w rozważaniach dotyczących teorii gier. Omówimy kilka gier, gdzie równowaga Nasha jest istotnym elementem rozważań.

Oligopol

Duopol Cournota

Augustin Cournot (1838, *Studia nad matematycznymi podstawami teorii dobrobytu*) – model zależności między dwiema konkurującymi ze sobą firmami:

- firmy 1 i 2 produkują ten sam towar – konsumentom wszystko jedno od kogo kupują
- q_i – wielkość produkcji firmy i, $q_1, q_2 \geq 0$, czyli całkowita produkcja $q_1 + q_2$ (w tysiącach)
- cena p zależy od liczby sztuk wyprodukowanego towaru, np. $p = 1000 - q_1 - q_2$; koszt produkcji 100$/1000 sztuk towaru
- cel: zmaksymalizować zysk

Oligopol

Duopol Cournota

Wyznaczamy postać normalną gry.

- zysk (u_i) = (produkcja $\times$ cena jednostkowa) - koszty

$$u_1(q_1, q_2) = (1000 - q_1 - q_2)q_1 - 100q_1,$$
$$u_2(q_1, q_2) = (1000 - q_1 - q_2)q_2 - 100q_2$$

- maximum tych funkcji, np. u_1:
  $1000 - 2q_1 - q_2 - 100 = 0 \hookrightarrow q_1 = 450 - q_2/2$
- czyli (gra jest symetryczna) powinni produkować
  $q_1 = q_2 = 300$ – ten profil strategii jest równowagą Nasha

Oligopol

Duopol Cournota

Z punktu widzenia przedsiębiorstw, równowaga Nasha gry Cournota nie jest efektywna. Pod tym względem gra Cournota jest podobna do dylematu więźnia. Zobaczymy to, jeśli zauważymy że firmy zrobią lepiej produkując po 225 000 sztuk towaru każda - wtedy maksymalizują łączny zysk, gdyż własne koszty i korzyści przedsiębiorstwa przy wzrastającej produkcji różnią się od łącznych kosztów i korzyści.

Oligopol

Duopol Bertranda

Model Cournota jest nierealistyczny, bo firmy wybierają wielkość produkcji, ale nie wybierają ceny.
Model Josepha Bertranda (1883, *Matematyczna teoria dobrobytu społecznego*): załóżmy, że firmy niezależnie od siebie ustalają ceny i patrzą jaki popyt. Niech relacja cena - produkcja jak poprzednio

$$Q = 1000 - p, \text{ gdzie } Q = q_1 + q_2$$

czyli przy cenie p popyt wyniesie $1000 - p$. Klienci kupują gdzie taniej, więc jeśli u konkurenta będzie taniej, to firma nie sprzeda ani jednej sztuki towaru.
p_i – ceny ustalone przez firmy
$u_i(p_1, p_2)$ – wypłaty dla firmy i

Oligopol

Duopol Bertranda

$$u_i(p_1, p_2) = (1000 - p_i)p_i - 100(1000 - p_i) = (1000 - p_i)(p_i - 100)$$

czyli

$$u_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (1000 - p_i)(p_i - 100) & \text{gdy } p_i < p_j \\ 0 & \text{gdy } p_i > p_j \end{cases}$$

Oligopol

Duopol Bertranda

W grze Bertranda firmy w równowadze osiągają zysk zero, a u Couranta zyski są dodatnie. U Bertranda ceny są niższe, a wielkości produkcji wyższe. U Couranta by zwiększyć sprzedaż trzeba zwiększyć produkcje, a duże przyrosty produkcji powodują duże spadki cen, co źle wpływa na zysk. Tak więc, w przypadku rynków z jednorodnymi towarami, manipulacje cenowe są lepsze od manipulacji ilościowych.

Polityka celna

Rządy mogą wprowadzać bariery ograniczające handel międzynarodowy. Korzyść przy niewielkich cłach, ale przy założeniu że inni ceł nie podniosą.

- wzrost cen na banany w UE (bo cło) $\hookrightarrow$ spadek globalnego popytu i spadek cen
- gdy różnica duża $\hookrightarrow$ dochody z ceł mogą być większe niż spadek dobrobytu obywateli UE

Inny kraj może stosować podobną politykę, np. USA na sery z UE. W rezultacie oba kraje stracą. Obie strony skorzystają, gdy uda się utrzymać politykę wolnego handlu.
Sytuacja podobna jak w dylemacie więźnia.

Zwalczanie przestępczości

Gary Becker (Noblista): *. . . optymalny zakres podejmowanych środków przymusu zależy m.in., od kosztów zatrzymania przestępców, osądzenia ich, rodzaju kary (grzywna, więzienie), reakcji więźniów na zmiany stosowanych środków.*

Wniosek: nawet przy optymalnej polityce ścigania przestępstw, będą one w dalszym ciągu popełniane.

Zwalczanie przestępczości

Gra

- władze (W) mają poziom wydatków na ściganie $x \geq 0$
- przestępca (P) wybiera poziom nielegalnej aktywności $y \geq 0$

Wypłata władz

$$u_W = -c\,x - y^2/x$$

$-y^2/x$ – negatywny efekt społeczny działalności przestępczej, c - umowny jednostkowy koszt działania policji

Wypłata przestępcy

$$u_P = y^{1/2}/(1 + x\,y)$$

$y^{1/2}$ – korzyść z działalności przestępczej, gdy nie schwytany;
$1/(1 + x\,y)$ – prawdopodobieństwo schwytania

Strategie mieszane

Strategia mieszana – wybór strategii zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa – ocena przez gracza jego własnych zachowań. Zbiór strategii mieszanych zawiera wszystkie strategie czyste. Funkcja wypłaty – wartość oczekiwana.

Strategie mieszane

Niektóre gry nie mają równowagi Nasha.
Orzeł i reszka: gracze jednocześnie i niezależnie od siebie wybierają 'orła' albo 'reszkę', pokazując monetę na swojej ręce. Jeżeli ich wybór jest zgodny, to gracz 2 musi oddać swoją monetę graczowi 1; w przeciwnym wypadku gracz 1 oddaje swoją monetę graczowi 2.

Tu żaden profil nie jest stabilny, zawsze jest wygrany i przegrany, ale sytuacja sie zmienia, gdy któryś z nich zmieni strategię. Wybór dwu strategii z prawdopodobieństwem 1/2 wygląda na wycofanie się z gry, ale naprawdę jest składnikiem równowagi Nasha w *strategiach mieszanych*

Strategie mieszane

Lobbing

Aby strategia mieszana była najlepszą odpowiedzią, musi ona przypisywać dodatnie prawdopodobieństwo tylko tym strategiom czystym, które są najlepszymi odpowiedziami.

Strategie mieszane

Lobbing

Przykład – lobbing

Dwie firmy niezależnie podejmują decyzje – lobbować (L), wtedy koszt = 15, czy nie lobbować (N). Gdy obie lobbują, albo obie nie lobbują to osiągną zysk = 10.

1. Y - lobbuje, X - nie, Y ma korzyść= 30, X ma korzyść= 0, więc wypłata Y= $30 - 15$
2. X - lobbuje, Y - nie, X ma korzyść= 40, Y ma korzyść= 0, więc wypłata X= $40 - 15$

X \ Y	L	N
L	–5, –5	25, 0
N	0, 15	10, 10

Rys. 1: Postać normalna gry w lobbing

Gra ma dwie równowagi w strategiach czystych: (N,L) oraz (L,N).

q – prawdopodobieństwo wyboru przez firmę Y strategii L, czyli strategia mieszana Y to $(q, 1-q)$
Wtedy firma X, jeśli wybierze strategię L, ma wypłatę
$-5\,q + 25\,(1-q) = 25 - 30\,q$
a jeśli wybierze strategię N, to $0\,q + 10\,(1-q) = 10 - 10\,q$
Dla firmy X, jeśli wybierze strategię mieszaną, to musi być

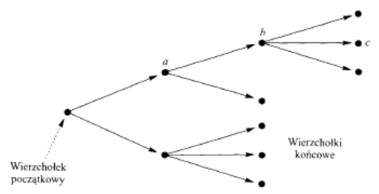
$$25 - 30q = 10 - 10q$$

czyli $q = 3/4$, czyli najlepszą odpowiedzią firmy X będzie strategia mieszana, jeżeli strategią firmy Y jest $(3/4, 1/4)$.

Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

Postulaty drzew gry

Postulat 1: Każdy wierzchołek następuje po wierzchołku początkowym. Tylko wierzchołek początkowy nie ma powyższej właściwości.



Rys. 2: Drzewo

Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

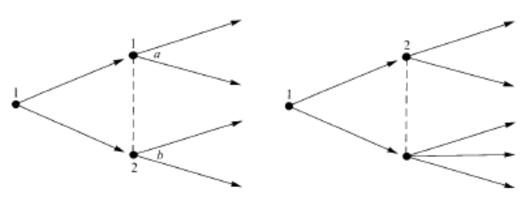
Postulaty drzew gry

Postulat 2: Każdy wierzchołek, oprócz początkowego, ma dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika. Wierzchołek początkowy nie ma poprzedników.

Postulat 3: Krawędzie wychodzące z tego samego wierzchołka mają różne nazwy.

Postulat 4: Każdy zbiór informacyjny zawiera wierzchołki decyzyjne tylko jednego gracza gracza.

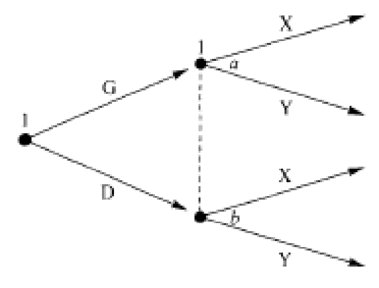
Postulat 5: Wszystkie wierzchołki w danym zbiorze informacyjnym mają identyczną liczbę bezpośrednich następników i ten sam zbiór nazw krawędzi (odpowiadających akcjom gracza) prowadzących do ich następników.



Rys. 3: To nie są zbiory informacyjne

Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

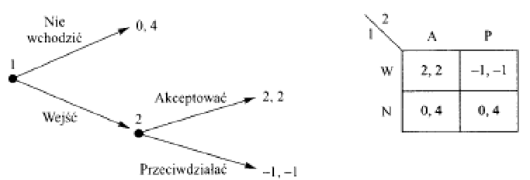
Zakładamy, że gracze mają pamięć doskonałą, czyli pamiętają wszystkie swoje posunięcia. Podobno teoretycy studiujący pamięć niedoskonałą, zapomnieli gdzie zostawili notatki.



Rys. 4: Pamięć niedoskonała

Gdy graf ma linię przerywaną, to mamy grę z niepełną informacją.

Indukcja wsteczna



Rys. 5: Wejście na rynek i wojna cenowa

Indukcja wsteczna

Mamy dwie firmy: G1 – konkurent, G2 – firma działająca od dawna.

Gracz G1 – wejść, czy nie wejść na rynek?

Jeżeli stara firma zaakceptuje działalność konkurenta, to obie firmy osiągną umiarkowane zyski.
Z rys. 5 wynika, że są dwie równowagi w strategiach czystych: (W,A) i (N,P)
Założenie – gracze podejmują decyzje o strategii przed rozpoczęciem gry i zapisują ją.

Indukcja wsteczna

Czy równowaga (N,P) jest prawdopodobna?

Raczej nie, bo rzadko zapisuje się strategie, nie uwzględniając upływu czasu. W rzeczywistości groźba wywołania wojny cenowej jest niewiarygodna.

Gry powtarzane

T – liczba etapów gry
$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ – zbiór wszystkich profili akcji graczy
$u_i(a)$ – wypłata gracza i przy wyborze profilu a

Zawsze rozgrywana jest ta sama gra i uczestnicy pamiętają historię gry. Wypłata w całej grze, jest sumą wypłat w grach etapowych.

Np. na rys. 6: jeżeli w pierwszym okresie dojdzie do wyniku (A,X), a w drugim do (B,Y), to

- wypłata gracza 1: $4 + 2 = 6$
- wypłata gracza 2: $3 + 1 = 4$

Gry powtarzane

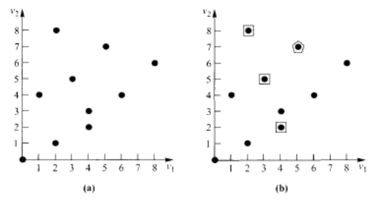
1 \ 2	X	Y	Z
A	4, 3	0, 0	1, 4
B	0, 0	2, 1	0, 0

Rys. 6: Jednokrotnie powtórzona gra etapowa ($T = 2$)

Gry powtarzane

Na rys. 7 każdy punkt odpowiada sumie dwóch wektorów wypłata w grach etapowych. Np. wektor wypłat (3,5) oznacza, że w pierwszym okresie nastąpi wynik (A,Z), a w drugim (B,Y), lub na odwrót.

Te gry mają bardzo dużo strategii.



Rys. 7: Możliwe wypłaty w grze powtarzanej

Literatura

1. J. Watson, Strategia, wprowadzenie do teorii gier, WNT, Warszawa 2005
2. J. von Neumann, O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1944

Koniec? :-(

Koniec wykładu 11