Zad. 1

W pierwszym podpunkcie napisano: "Jeżeli książka była schowana w kominku: z braku pomysłów Hans postanawia zostawić tam książkę jeszcze jeden dzień;". Oznacza to, że książka w nieskończoność będzie tkwić w kominku. Prawdopodobieństwo znalezienia książki pod poduszką jest więc zerowe, gdyż nie ma możliwości, by opuściła ona kominek.

Zad. 2

Funkcja $f$ jest ściśle malejąca, więc tylko jeden wierzchołek prostokąta może dotykać do wykresu, gdyż wartość osiąganą w punkcie styku funkcja $f$ osiąga tylko raz. Zatem drugi wierzchołek rozważanego boku prostokąta jest zupełnie dowolny i można go umieścić gdziekolwiek. Wynika stąd, że dla każdej ustalonej wysokości prostokąta długość jego podstawy może być dowolnie duża. A zatem maksymalne pole nie istnieje. Można też przyjąć, choć nie jest to do końca ścisłe, że maksymalne pole jest nieskończone.

Zad. 3

Pierwsza prosta: $ax + b$. Druga prosta: $cx + d$. Uwaga: $c$ jest ujemne!

Obliczamy wpierw punkty A i B. Punkt A jest zadany warunkiem $aA + b = 0$, więc $A = -\frac{b}{a}$. Punkt B jest zadany warunkiem $cB + b = 0$, więc $B = -\frac{b}{c}$. Trójkąt, o którym mowa w treści zadania ma podstawę o długości $B - A$, a wysokość równą $Cb$. Stąd jego pole powierzchni jest równe $\frac{1}{2}Cb(B - A) = \frac{Cb^2(c-a)}{2ac}$. Z definicji rozkładu prawdopodobieństwa pole to ma być równe 1, więc $C = \frac{2ac}{b^2(c-a)}$.

Liczymy wartość średnią (z definicji):

$$
\begin{aligned}
\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \int_A^B xf(x)dx = \int_A^0 xC(ax+b)dx + \int_0^B xC(cx+b)dx = C\int_A^0 ax^2 + bxdx + C\int_0^B cx^2 + bxdx \\
&= C\int_A^0 ax^2dx + C\int_A^0 bxdx + C\int_0^B cx^2dx + C\int_0^B bxdx \\
&= Ca\frac{x^3}{3}\Big|_A^0 + Cb\frac{x^2}{2}\Big|_A^0 + Cc\frac{x^3}{3}\Big|_0^B + Cb\frac{x^2}{2}\Big|_0^B \\
&= C\left(\frac{a(-A^3)}{3} + \frac{b(-A^2)}{2} + \frac{cB^3}{3} + \frac{bB^2}{2}\right) = C\left(\frac{ab^3}{3a^3} + \frac{-bb^2}{2a^2} + \frac{-cb^3}{3c^3} + \frac{bb^2}{2c^2}\right) \\
&= C\left(\frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^3}{2a^2} - \frac{b^3}{3c^2} + \frac{b^3}{2c^2}\right) = \frac{Cb^3}{6}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{Cb^3(a^2-c^2)}{6a^2c^2} = -\frac{b(a+c)}{3ac}
\end{aligned}
$$

Liczymy wartość wariancji (z definicji):

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2x\mu f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \mu^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu^2 + \mu^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx &= \int_A^B x^2 f(x)dx = \int_A^0 x^2C(ax+b)dx + \int_0^B x^2C(cx+b)dx = C\int_A^0 ax^3 + bx^2dx + C\int_0^B cx^3 + bx^2dx \\
&= C\int_A^0 ax^3dx + C\int_A^0 bx^2dx + C\int_0^B cx^3dx + C\int_0^B bx^2dx \\
&= Ca\frac{x^4}{4}\Big|_A^0 + Cb\frac{x^3}{3}\Big|_A^0 + Cc\frac{x^4}{4}\Big|_0^B + Cb\frac{x^3}{3}\Big|_0^B \\
&= C\left(\frac{a(-A^4)}{4} + \frac{b(-A^3)}{3} + \frac{cB^4}{4} + \frac{bB^3}{3}\right) = C\left(\frac{-ab^4}{4a^4} + \frac{bb^3}{3a^3} + \frac{cb^4}{4c^4} + \frac{-bb^3}{3c^3}\right) \\
&= C\left(-\frac{b^4}{4a^3} + \frac{b^4}{3a^3} + \frac{b^4}{4c^3} - \frac{b^4}{3c^3}\right) = \frac{Cb^4}{12}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}\right) = \frac{Cb^4(c^3-a^3)}{12a^3c^3} = \frac{b^2(a^2+ac+c^2)}{6a^2c^2}
\end{aligned}
$$

Zatem $\sigma^2 = \frac{b^2(a^2+ac+c^2)}{6a^2c^2} - \frac{b^2(a+c)^2}{9a^2c^2} = \frac{3b^2(a^2+ac+c^2)-2b^2(a+c)^2}{18a^2c^2} = \frac{b^2(3a^2+3ac+3c^2-2a^2-4ac-2c^2)}{18a^2c^2} = \frac{b^2(a^2-ac+c^2)}{18a^2c^2}$