

TEORIA PROGNOZY DYNAMICZNEJ²

1. Podstawy matematyczne.

Dział matematyki zajmujący się tym zagadnieniem nosi nazwę *teorii procesów stochastycznych*. Za [1, str. 793] można powiedzieć, że jest to rozszerzenie rachunku prawdopodobieństwa służące do modelowania zjawisk przypadkowych w ich powiązaniu z czasem.

Do predykcji (przewidywania) interpolacji i filtracji praktycznie nadają się jedynie *procesy stacjonarne*. Pojedynczą realizację procesu stochastycznego nazywamy *szeregiem czasowym*.

Dla procesu stacjonarnego związki probabilistyczne nie ulegają zmianie dla dowolnego przesunięcia w czasie. Zatem:

$$1.1 \quad P[X(t) < X_0] = P[X(t+\tau) < X_0]$$

gdzie P oznacza dystrybuantę zmiennej losowej X , t i τ wskaźniki czasowe a X_0 jest ustaloną wartością zmiennej losowej X .

Podstawową własnością procesów stacjonarnych jest *ergodyczność*. Polega ona na tym, że znajomość pojedynczej realizacji procesu czyli zaobserwowanego szeregu czasowego w dostatecznie długim interwale czasowym ($t \rightarrow \infty$) pozwala wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa procesu lub jego parametry.

Dzięki ergodyczności teorię procesów stochastycznych wykorzystuje się w obliczeniach numerycznych. Jedynie dla procesów stacjonarnych słuszne jest *twierdzenie ergodyczne*. Dotyczy ono wszystkich momentów procesu. Np. dla wartości oczekiwanej wyraża się ono zależnością:

$$1.2 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} E \left(\left| \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m \right|^2 \right) = 0; \text{ gdzie } m = E(X), t \in (0, T)$$

Twierdzenie to pozwala oszacować rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X za pomocą średnich czasowych.

2. Procesy autokorelacyjne.

W zastosowaniach rozróżnia się trzy rodzaje stacjonarności. Jest mianowicie np. [7, str. 579]:

2.1 Ścisła stacjonarność.

Określamy momenty czasowe zmiennej losowej X :

$$2.1 \quad m(t) = E(X_t) \quad \text{wartość oczekiwana}$$

$$2.2 \quad \sigma^2(t) = E(X_t - m(t))^2 \quad \text{wariancja}$$

$$2.3 \quad \gamma(t_1, t_2) = E(X_{t_1} - m(t_1))(X_{t_2} - m(t_2)) = \text{cov } X(t_1)X(t_2) \quad \text{kowariancja}$$

itp.

oraz żądamy aby łączny rozkład $X(t_1)X(t_2)...X(t_n)$ był identyczny z łącznym rozkładem $X(t_1+k)X(t_2+k)...X(t_n+k)$ dla wszystkich k i n .

Określenie (specyfikacja) łącznego rozkładu zmiennych losowych jest trudne i w praktyce prawie nigdy nie stosowane.

¹ Wykładowca: Prognozowania i Symulacji, Prognozowania Procesów Ekonomicznych w Uczelni Warszawskiej im. MS-C. e-mail: a_kasprzycki@op.pl

² Referat wygłoszony na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w dniu 28.10.2008 (seminarium z Ekonofizyki i Socjofizyki).

2.2 Słaba stacjonarność.

Jeżeli:

$$2.4 \quad E(X_t) = m \quad \text{jest stałe w czasie oraz}$$

$$2.5 \quad E(X_{t_1} - m)(X_{t_2} - m) = E(X_t - m)(X_{t+k} - m) = \gamma(k) \quad \text{dla każdego } k,$$

to proces taki i odzwierciedlający go szereg czasowy nazywamy **slabo stacjonarnym**.

Dla $k = 0$ uzyskuje się wariancję procesu:

$$2.6 \quad E(X_t - m)^2 = \sigma^2 \quad \text{również stałą w czasie.}$$

Zamiast kowariancji wprowadza się funkcję autokorelacji określoną zależnością:

$$2.7 \quad \rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0) = \gamma(k)/\sigma^2 \quad \text{której wykres w funkcji opóźnienia } k \text{ nazywa się}$$

korelogramem (autoradiogramem).

2.3 Trendo stacjonarność.

We współczesnych zastosowaniach procesy tego typu odgrywają niezwykle ważną rolę.

Na ogół mamy do czynienia z procesami niestacjonarnymi w których zarówno wartość oczekiwana $m(t)$ jak i wariancja $\sigma^2(t)$ są funkcjami czasu t .

Jeżeli jednak na podstawie teorii ekonomicznej albo przewidywania ekspertów uda się określić trend procesu a następnie po jego uwzględnieniu (odjęciu) od szeregu czasowego uzyskuje się szereg słabo stacjonarny, to cały proces nazywamy **trendo stacjonarnym**.

3. Modele auto regresyjne AR(k).

3.1 Model AR(0).

Jeżeli funkcja autokorelacyjna określona wzorem 2.7 sprowadza się do relacji:

$$3.1 \quad \varrho(k) = \begin{cases} 1 & \text{dla } k=0 \\ 0 & \text{dla } k \neq 0 \end{cases} \quad \text{to proces taki nazywa się } \textbf{białym szumem}.$$

Jest to proces czysto losowy składający się z ciągu niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Jeżeli rozkłady te są normalne $N(m; \sigma)$ to nazywamy go **gusowskim**.

Jest to elementarny (najprostszy) proces stacjonarny.

3.2 Model AR(1).

Ogólny schemat takiego procesu określa zależność:

$$3.2a \quad X(t) = a X(t-1) + \varepsilon(t) \quad \text{a dla szeregu czasowego o przyjętym kroku } \Delta t,$$

$$3.2b \quad X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t$$

gdzie $\{\varepsilon(t)\} = \{\varepsilon_t\}$ jest procesem czysto losowym czyli białym szumem o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ^2 nie zależnych od czasu oraz funkcji autokorelacyjnej sprowadzającej się do relacji 3.1.

Przyjmując w zależności 3.2 a $t = n$ i cofając się do początku szeregu czasowego uzyskuje się:

$$3.3 \quad X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t = a(a X_{t-1} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = a^2 X_{t-2} + a \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t = a^n X_{t-n} + \sum_{m=0}^n a^m \cdot \varepsilon_{t-m}$$

Ostatni wyraz jest sumą cząstkową postępu geometrycznego. Dla $n \rightarrow \infty$ uzyskuje się zbieżność (ograniczonosc) wyrażenia 3.3 tylko dla $|a| < 1$. Wtedy również ze wzoru na sumę nieskończonego ($n \rightarrow \infty$) postępu geometrycznego jest:

$$3.4 \quad X_t = \varepsilon_t / (1-a) \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_t = (1-a) X_t \quad \text{czyli, że proces jest odwracalny.}$$

Z warunku odwracalności wynika, że również proces **$X(t)$ jest stacjonarny** ponieważ istnieje operator liniowy $(1-a)$, sprowadzający go do elementarnego procesu czysto losowego.

W przypadku $a = 1$ mamy do czynienia z **blędzeniem przypadkowym**.

Dla ustalenia uwagi zakładając, że $X_0 = 0$ uzyskuje się wtedy następujące relacje:

$$3.5 \quad X_1 = \varepsilon_1; X_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{i ogólnie} \quad X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

Ponieważ: $E(\varepsilon_i) = m$ oraz $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$ jest zatem,

$$3.6 \quad EX_t = t m \quad \text{i} \quad E(X_t - t m)^2 = t \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{Czyli wartość oczekiwana i wariancja procesu są liniowymi funkcjami czasu. Wynika stąd, że blędzenie przypadkowe jest procesem nie stacjonarnym.}$$

3.3 Procesy ARMA(k,m).

W prognozowaniu dynamicznym istotną rolę odgrywają **stacjonarne procesy auto regresyjne i średniej ruchomej rzędu $k = m$** .

Procesy tego typu są sumą (złożeniem) dwu procesów: AR(k) i MA(m). Średnia ruchoma MA(m) w każdym przypadku jest **slabo stacjonarna** (np. patrz [7, str.583]). Natomiast część auto regresyjna AR(k) tylko wtedy gdy **moduły wszystkich pierwiastków charakterystycznych są większe od jedności**. Dowód tego twierdzenia wymaga znajomości teorii liczb zespolonych i można go znaleźć np w [7, str. 587]. Podręcznik ten prezentuje jednak wiedzę jeszcze z przed pojawienia się nowoczesnych pakietów obliczeniowych np. GRETl-a (dostępny w internecie jako bezpłatne oprogramowanie). Na podstawie np.[2] można przyjąć, że pakiety tego typu nie wykorzystują już rozpowszechnionej w literaturze polskiej metody Yule'a-Walkera, estymacji parametrów procesu AR(k) (np. [8, str.236]), ale numerycznie obliczają je Metodą Największej Wiarygodności (MNV), łącznie dla obu procesów.

4. Współzależność procesów.

W opisie zjawisk gospodarczych i ekonomicznych mamy do czynienia z pewną ilością (zbiorem wystarczającym do wnioskowania w przyszłość) szeregów czasowych o takim samym kroku np. $\Delta t = \text{miesiąc}$ (najczęstsza jednostka w makroekonomicznych rozważaniach) i takiej samej liczebności n . Zbiór taki uważa się za pewną całość wystarczającą do opisu dynamiki zjawisk gospodarczych np. w skali całego państwa.

Jako paradygmat przyjmuje się, że zestawione przez urzędy statystyczne szeregi czasowe są ze sobą powiązane zależnościami przyczynowo-skutkowymi. W pierwszym i jedynie stosowanym

przybliżeniu przyjmuje się, że miarą tych współzależności są współczynniki korelacji liniowej pomiędzy zmiennymi losowymi. Niektóre zmienne nie mają jednak charakteru losowego tzn. **są z góry ustalone**. Przykładem mogą być: główne stopy procentowe, akcyzy (jeżeli zostały zmienione w analizowanym interwale czasowym), podatki itp. Przyjmuje się również, że są to zmienne przyczynowe działające na układ gospodarczy z pewnym opóźnieniem np. miesięcznym. O pozostałych szeregach czasowych - będących pojedynczą realizacją jakiegoś procesu stochastycznego - można na ogół powiedzieć, że mają relacje przyczynowo-skutkowe ale o niewiadomym kierunku albo wręcz przyjąć, że są one obustronne (np. X_t jest skutkiem Y_t jak również Y_t jest skutkiem X_t). W klasycznej ekonometrii problem ten rozwiązuje się za pomocą równań wzajemnie współzależnych. Przy czym postać zredukowana takiego modelu pozwala uzyskać prognozę dynamiczną na kilkanaście kroków na przód. Typowe szeregi ekonomiczno-gospodarcze a w szczególności finansowe prawie nigdy nie są stacjonarne.

Na gruncie teorii informacji zmiana entropii szeregu czasowego dana jest wzorem (np. [1, str. 792]):

$$4.1 \quad I(X_t)_k = H(X_t) - H(X_t | X_{t-k}) \quad \text{gdzie}$$

$$4.2 \quad H(X_t | X_{t-k}) = - \sum_{i=1}^n P(X_i | X_{i-k}) \cdot \log_2 P(X_i | X_{i-k})$$

jest entropią warunkową zmiennej losowej $X(t)$ względem jej opóźnienia rzędu k , w szeregu czasowym o liczebności n . Symbolem P oznaczono prawdopodobieństwo.

Zastępując we wzorach 4.1 i 4.2 entropie warunkowe i prawdopodobieństwa warunkowe członami typu: $P(X_j | Y_{j-k})$ uzyskuje się miarę informacji o szeregu X_j zawartą w szeregu Y_j opóźnionym o $k = 0, 1, \dots$ kroków. Jeżeli szeregi te są niezależne wtedy $I(X_j | Y_{j-k}) = 0$.

Z kolei jeżeli $I(X_j)_k = 0$ to szereg taki jest białym szumem o ile jego wartość oczekiwana i wariancja są stałe w czasie.

W zastosowaniach dla szeregów o liczebności n badany jest rozkład statystyczny i funkcja autokorelacji (na poziomie istotności 0,05 wszystkie współczynniki nie mogą być różne od zera). Jeżeli tak jest to przyjmuje się, że badany proces jest białym szumem.

5. Procesy ortogonalne (nie skorelowane).

Badając układ gospodarczy nie interesują nas procesy niezależne. Poza jednym wyjątkiem gdy analizujemy ten układ poprzez jego **główne składowe** lub **szeregi syntetyczne** [3].

K szeregów czasowych $X1, X2, \dots, Xk$ o takiej samej liczebności n i jednakowym kroku Δt można rozłożyć na k niezależnych liniowo³ szeregów czasowych $PC1, PC2, \dots, PCk$ o takiej samej liczebności n i kroku Δt . Zostało to pokazane w pracach [3] i [4].

Syntetyczny szereg $PC1$ posiada zawsze największą wariancję a PCk najmniejszą. Jeżeli założymy, że wszystkie główne składowe mają wartości oczekiwane równe zero ($m_k = 0 ; k = 1, 2, \dots, k$)⁴, to ich wariancie spełniają nierówności:

$$5.1 \quad \sigma_{PC1}^2 > \sigma_{PC2}^2 > \dots > \sigma_{PCk}^2$$

³ W praktyce dla $n > 100$.

⁴ Założenie to nie jest konieczne ale wygodne do udowodnienia tezy podanej w 1 - 4 wierszach na następnej stronie.

Ze wzorów 4.1 i 4.2 wynika (dowód pomijamy), że największa ilość informacji o całym zbiorze szeregów czasowych o liczebności $k \cdot n$ zawarta jest w $PC1$ a najmniejsza w PCk . Pomijając zatem ostatnie główne składowe traci się mniej informacji niż w przypadku odrzucenia takiej samej ilości nie przekształconych szeregów czasowych z rozważanego zbioru.

Model strukturalny dla zmiennych ekonomiczno-gospodarczych: $X1(t), X2(t), \dots, Xk(t)$ dany jest **zależnością deterministyczną (bez części losowej)**. W notacji macierzowej:

$$5.2 \quad \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ \vdots \\ Xk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} PC1 \\ PC2 \\ \vdots \\ PCk \end{bmatrix}$$

Równania te są **jednoznacznie określone** (rzęd macierzy $[a_{ij}]$; $i, j = 1, 2, \dots, k$ jest równy k). Istnieje zatem jedno rozwiązanie układu 5.2. Czyli:

$$5.3 \quad [PCi] = [b_{ij}] \cdot [Xi] \text{ gdzie } [b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}; i, j = 1, 2, \dots, k$$

Traktując niektóre ze zmiennych Xj ; $j=1, 2, \dots, r$ jako **z góry ustalone** (tzn. **nie jako zmienne losowe** np. stopy procentowe, akcyzy itp.) i rezygnując z r ostatnich głównych składowych (o najmniejszej ilości informacji), równania 5.2 lub 5.3 można rozwiązać względem interesujących nas zmiennych objaśniających i przedstawić w formie:

$$5.4 \quad \begin{bmatrix} X(r+1) \\ X(r+2) \\ \vdots \\ Xk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(k-r)1} & c_{(k-r)2} & \dots & c_{(k-r)k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X1 \\ \vdots \\ Xr \\ PC1 \\ \vdots \\ PC(k-r) \end{bmatrix}$$

6. Predykcja.

Podstawą wnioskowania w przyszłość mogą być równania 5.4, ściśle deterministyczne. W przypadku małych prób losowych (krótkich szeregów czasowych) lepiej jest jednak zrezygnować z algebraicznego rozwiązania układu 5.2 a posłużyć się KMNK dla każdego z równań 5.4 (model korelacji wielorakiej). Praktycznie otrzymuje się zerowy proces resztowy a błędy estymacji parametrów są rzędu 10^{-9} (np. dla $n = 13$).

Wartości z góry ustalone: $X1, X2, \dots, Xr$ mogą być symulowane w różnych wariantach np. zgodnie z przyjętą polityką zmian stóp procentowych przez RPP, podatków itp., przy arbitralnym opóźnieniu ich wartości np. o jeden miesiąc (paradygmat ogólnie przyjmowany: skutek opóźniony w stosunku do przyczyny).

Pozostałe zmienne objaśniające: $PC1, PC2, \dots, PC(k-r)$, z powodu ich syntetyczności (są tworem czysto matematycznym zawierającym "rozmytą" informację o całym zbiorze analizowanych szeregów czasowych) można prognozować jedynie **metodami auto regresyjnymi**.

Andrzej Kasprzycki. Teoria prognozy dynamicznej.

Istotą tej predykcji jest jednak **określenie trendu**. Można to zrobić matematycznie. W niektórych przypadkach pomocne mogą być osiągnięcia **matematyki chaosu deterministycznego**.

Np. na podstawie **kwadratowego sprzężenia zwrotnego**:

$$6.1a \quad PCx(t) = a + b PCx(t-1) + c PC^2x(t-1) ; x = 1, 2, \dots, (k-r)$$

$$6.1b \quad PCx(t) = PCx(t-1)$$

o ile takie istnieje, znaleźć granice zbieżności trendu.

Mianowicie, jeżeli funkcja iteracyjna 6.1 a i b ma rzeczywiste pierwiastki i parametr c jest różny od zera to iteracje mają **atraktor**.

Atraktorem jest granica zbieżności funkcji kwadratowej 6.1a dla $t \rightarrow \infty$. W przypadku jej istnienia jest to **punkt stały przyciągający**. Zgodnie z [4, str. 20, rys. 5.1 - S1], przy czym pochodna względem $PCx(t-1)$ spełnia warunek :

$$6.2 \quad d PCx(t) / d PCx(t-1) = b + 2 PCx(PCx^p) \begin{cases} \text{ należy do } (0,1) \text{ dla I pierwiastka} \\ \text{ jest } > 1 \text{ dla II pierwiastka} \end{cases} \quad 5$$

Jedno z miejsc zerowych (pierwiastek) określa **stabilny punkt stały**, do którego trajektorie zbliżają się w jego pobliżu poprzez wartości mniejsze i większe od niego, a drugie **niestabilny punkt stały**, od którego trajektorie odchodzą również poprzez wartości mniejsze i większe od niego.

Równanie 6.1a można estymować KMNK. Jest przy tym:

$$6.3 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} PCx(t) = PCx^p \quad \text{gdzie } PCx^p \text{ jest stabilnym punktem stałym przyciągającym.}$$

W tym przypadku trend może być kwadratowy względem czasu (z ekstremum funkcji w punkcie PCx^p). Dla małych prób losowych lepiej sprawdza się jednak trend $a \ln t$ gdzie t jest indeksem czasowym a a parametrem. Parametr ten należy tak wybrać (w kolejnych obliczeniach) aby w modelu numerycznym ARMAX($a, k, k, a \ln t$) współczynnik przy trendzie był istotnie różny od zera (np. przy poziomie ufności 99%). Ponadto trend musi zmierzać do właściwego punktu stałego (do wyboru są dwa pierwiastki równania 6.1a i 6.1b) jak również część AR modelu ARMAX powinna mieć moduły pierwiastków charakterystycznych istotnie większe od jedności.

Na zakończenie zauważymy, że w pakiecie GRETL w modelach ARMAX i ARMA(k, k) maksymalna wartość opóźnienia k wynosi cztery ($k = 4$). Również parametr a wymaga jedynie przybliżonego określenia bo pakiet programowy oszacuje go dokładnie. Zostanie to pokazane w rozdziale 7.

7. Przykład obliczeniowy dla polskich danych gospodarczych.

Posłużymy się danymi gospodarczymi opublikowanymi w THE WALL STREET JOURNAL POLSKA w okresie od czerwca do sierpnia 2008 r. przytoczonymi w Tabl. 7.1 na następnej stronie. W dalszym ciągu główną stopę procentową NBP (SG) potraktujemy jako jedyną zmienną przyczynową z góry ustaloną. Przyjmiemy również, że jej zmiana skutkuje dopiero w następnym miesiącu. Wybrano 9 szeregów czasowych i rozłożono je na główne składowe. Wyniki otrzymane z pakietu GRETL przytoczono w Tabl. 7.2 na str. 8. Kolumny wektorów wartości własnych są elementami macierzy $[a_{ij}]$; $i, j = 1, 2, \dots, 9$ (wzór 5.2). Zbiór zmiennych gospodarczych został wy specyfikowany w 1-wszej kolumnie dolnej części tabeli. Opisy do poszczególnych zmiennych podano w tabl. 7.1 na str. 7.

5 W rzeczywistych przypadkach otrzymuje się bardzo małe wartości parametru c (rozdział 7) i w pobliżu punktów stałych parabola może być aproksymowana linią prostą.

Andrzej Kasprzycki. Teoria prognozy dynamicznej.

Tabl. 7.1

Obs	SG	I1	KD	DD	KB
2007:01	4,00	1,6			
2007:02	4,00	1,9			
2007:03	4,00	2,5			
2007:04	4,25	2,3			
2007:05	4,25	2,3	216,80	239,19	32,3
2007:06	4,50	2,6	222,80	239,66	34,0
2007:07	4,50	2,3	231,66	240,40	34,3
2007:08	4,75	1,5	239,44	245,92	34,1
2007:09	4,75	2,3	244,72	247,30	31,2
2007:10	4,75	3,0	247,43	248,93	28,9
2007:11	5,00	3,6	252,25	255,43	25,2
2007:12	5,00	4,0	259,95	262,78	18,5
2008:01	5,25	4,0	267,83	275,29	21,9
2008:02	5,50	4,2	271,80	280,75	19,3
2008:03	5,75	4,1	279,90	284,79	21,2
2008:04	5,75	4,0	285,46	285,36	24,7
2008:05	5,75	4,4	288,40	290,04	27,0
2008:06	6,00	4,6	299,00	292,60	27,0
2008:07		4,8	301,80	298,40	

Obs	OS	KP	time	SD	B
2007:01			1		
2007:02			2	117,40	
2007:03			3	116,00	14,30
2007:04	78,93		4	115,00	13,50
2007:05	78,22	23,8	5	114,10	13,00
2007:06	73,56	24,1	6	113,50	12,30
2007:07	73,22	22,9	7	113,00	12,00
2007:08	71,00	24,4	8	112,80	11,80
2007:09	70,44	23,6	9	112,60	11,60
2007:10	76,13	21,9	10	112,35	11,50
2007:11	74,79	19,5	11	112,20	11,45
2007:12	74,46	18,7	12	113,50	11,40
2008:01	74,35	20,0	13	115,00	11,30
2008:02	74,44	22,0	14	116,00	11,20
2008:03	69,28	23,0	15	114,00	11,10
2008:04	66,58	22,5	16	112,50	10,50
2008:05	72,11	20,0	17	111,10	10,00
2008:06	75,33	17,0	18	110,00	9,60
2008:07			19		9,40

SG stopa główna NBP (%)

I1 inflacja rzeczywista (%)

KD kredyty gospodarstw domowych (mld zł)

DD depozyty gospodarstw domowych (mld zł)

KB koniunktura w budownictwie (%)

OS zaangażowanie inwestorów zagranicznych w polskie obligacje (mld zł)

KP koniunktura w przemyśle (%)

time zmienna czasowa t

SD sprzedaż detaliczna (ceny stałe)

B bezrobocie (%)

Andrzej Kasprzycki. Teoria prognozy dynamicznej.
Tabl. 7.2

Macierz korelacji wartości własnych

Czynnik	Wartość własna	Udział	Skumulowany udział w wariancji
1	5,7849	0,6428	0,6428
2	1,4875	0,1653	0,8080
3	1,3450	0,1494	0,9575
4	0,2232	0,0248	0,9823
5	0,0753	0,0084	0,9906
6	0,0511	0,0057	0,9963
7	0,0216	0,0024	0,9987
8	0,0095	0,0011	0,9998
9	0,0021	0,0002	1,0000

Wektory wartości własnych (ładunki składowej)

Zmienna	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
SG_1	-0,401	-0,117	0,136	0,223	0,172	-0,286	0,170
I1	-0,386	0,239	-0,058	0,072	0,662	0,487	-0,288
KD	-0,410	-0,065	0,076	0,133	-0,283	-0,174	0,033
DD	-0,401	0,032	0,135	0,398	-0,068	0,100	0,529
KB	0,298	-0,508	-0,156	0,488	-0,096	0,555	0,100
OS	0,116	0,412	-0,671	0,512	-0,007	-0,311	-0,089
KP	0,303	-0,141	0,527	0,464	0,331	-0,366	-0,317
SD	0,126	0,644	0,443	0,207	-0,398	0,318	-0,086
B	0,389	0,248	0,068	-0,102	0,413	-0,043	0,694

Zmienna	PC8	PC9
SG_1	0,784	0,053
I1	-0,068	-0,148
KD	-0,225	-0,801
DD	-0,429	0,427
KB	0,178	-0,178
OS	0,000	-0,005
KP	-0,227	-0,003
SD	0,249	-0,043
B	0,020	-0,343

Dla trzech wybranych zmiennych gospodarczych: I1, KP i B oraz jednej zmiennej z góry ustalonej $SG_1 = SG(t-1)$ model 5.4 otrzymany KMNK przytoczono w Tabl. 7.3 na str. 9. Dane liczbowe zestawione w kolumnach są wierszami macierzy $[c_{ij}]$; $i=1,2,3$, $j=1,2,\dots,10$. Wektor zmiennych objaśnianych jest równy $[I1 \text{ KP } B]^T$. Wektor zmiennych objaśniających stanowi 1-sza kolumna tabeli 7.3 i jest równy $[const \text{ SG}_1 \text{ PC1} \dots \text{PC8}]^T$ (T oznacza transpozycję). Ponieważ równania są niezależne liniowo (zmiennie też), zmienne objaśniające: PC1,...PC8 mogą być prognozowane indywidualnie, co pokażemy niżej.

7.1 Predykcja głównej składowej PC1.

Równanie 6.1a jest równoważne prognozie statycznej (modelowi statycznemu) zmiennej losowej PC1 względem jej pierwszego opóźnienia PC_1 i jego kwadratu $(PC1_1)^2 = sq_PC1_1$. Estymacje tego równania KMNK przytoczono w Tabl. 7.4 na str. 9 a jej graficzny obraz pokazuje lustr. 7.1 na str. 10. Z warunku iteracyjnego 6.1b i zależności 6.2 uzyskuje się **dwa punkty stałe** (przyciągający i odpychający). Jest mianowicie;

7.1 $PC1^* = -28,8$ przyciągający i $PC1^{**} = 33,94$ odpychający.

Andrzej Kasprzycki. Teoria prognozy dynamicznej.

Tabl. 7.3

Metoda estymacji: KMNK

Zmienna zależna: I1

Zmienna zależna: KP

Zmienna zależna: B

	Model 6		Model 8		Model 9
const	25,28** (1,131e-07)	const	22,49** (9,034e-08)	const	72,75** (2,889e-07)
SG_1	-4,537** (2,318e-08)	SG_1	-0,1676** (1,852e-08)	SG_1	-12,56** (5,922e-08)
PC1	-1,629** (6,148e-09)	PC1	0,6409** (4,912e-09)	PC1	-2,850** (1,571e-08)
PC2	-0,09514** (1,774e-09)	PC2	-0,3332** (1,417e-09)	PC2	-0,6602** (4,533e-09)
PC3	0,3491** (2,115e-09)	PC3	1,210** (1,689e-09)	PC3	1,228** (5,402e-09)
PC4	0,7521** (3,431e-09)	PC4	1,075** (2,741e-09)	PC4	1,734** (8,765e-09)
PC5	1,236** (2,700e-09)	PC5	0,7680** (2,157e-09)	PC5	1,970** (6,898e-09)
PC6	-0,3360** (4,415e-09)	PC6	-0,8600** (3,527e-09)	PC6	-2,443** (1,128e-08)
PC7	0,2006** (2,709e-09)	PC7	-0,6979** (2,164e-09)	PC7	2,314** (6,921e-09)
PC8	2,294** (1,209e-08)	PC8	-0,4273** (9,661e-09)	PC8	6,577** (3,089e-08)
n	14	n	14	n	14
R-kwadrat	1,000	R-kwadrat	1,000	R-kwadrat	1,000
lnL	308,641	lnL	311,785	lnL	295,509

Błędy ocen w nawiasach

* oznacza istotność przy poziomie 10 procent

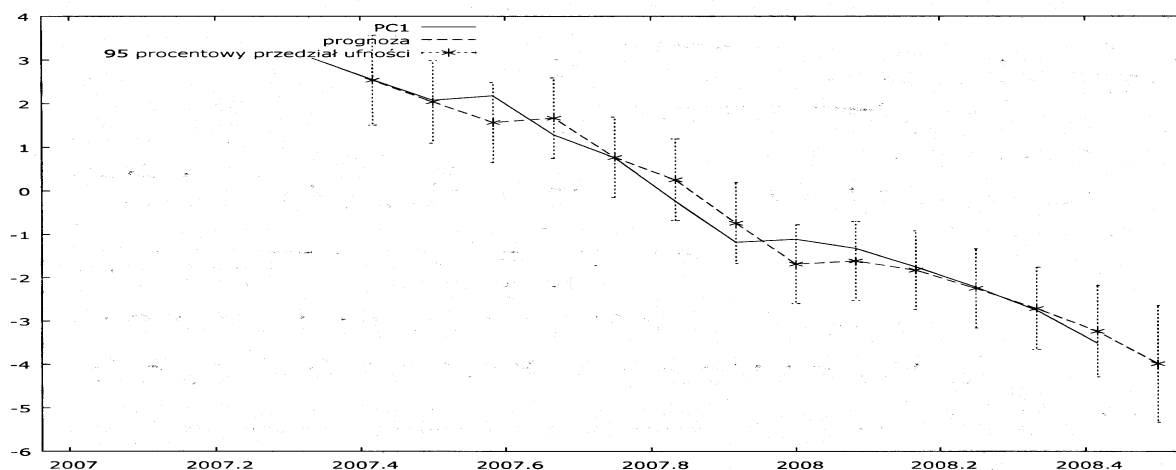
** oznacza istotność przy poziomie 5 procent

Tabl. 7.4

Estymacja KMNK z wykorzystaniem 13 obserwacji 2007:06-2008:06

Zmienna zależna: PC1

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,509064	0,177965	-2,860	0,01694 **
PC1_1	0,995604	0,0582193	17,101	<0,00001 ***
sq_PC1_1	0,00148742	0,0399578	0,037	0,97104



Ilustracja 7.1: $PC1_t = 0,51 + PC1_{t-1} + 0,0015 PC1_{t-1}^2$

W celu uzyskania prognozy dynamicznej metodami autokorelacyjnymi na początek wprowadzimy trend liniowy. Rezultaty przytoczono w tabl. 7.5 i na ilustracji 7.2.

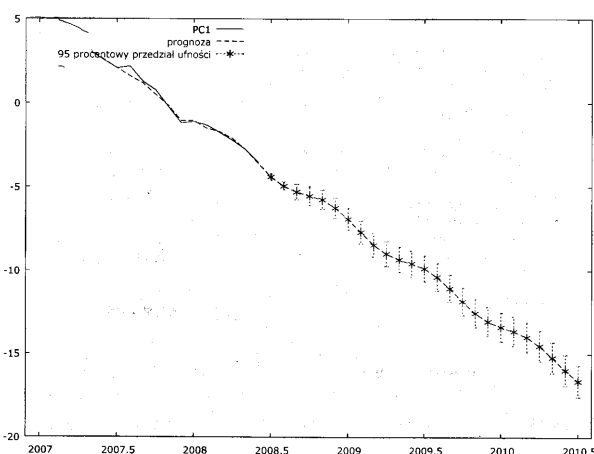
Model 10: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC1
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	5,68316	0,0719720	78,964	<0,00001 ***
phi_1	0,0422750	0,253862	0,167	0,86774
phi_2	0,0961935	0,242623	0,396	0,69176
phi_3	-0,260835	0,179436	-1,454	0,14605
phi_4	-0,738914	0,240928	-3,067	0,00216 ***
theta_1	-0,633880	3,29164E+06	-0,000	1,00000
theta_2	-1,16707	5,37813E+06	-0,000	1,00000
theta_3	0,739262	1,53657E+06	0,000	1,00000
theta_4	0,272450	896804	0,000	1,00000
time	-0,511879	0,00609933	-83,924	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,152348
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 2,13119
Średnia z zaburzeń losowych = 0,0467005
Wariancja z zaburzeń losowych = 0,00855106
Logarytm wiarygodności = 6,4640478
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 9,0719
Kryterium bayesowskie Schwarz'a (BIC) = 16,1015
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 8,42118

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,7034	0,7275	1,0119	0,1277
Pierwiastek 2	2	0,7034	-0,7275	1,0119	-0,1277
Pierwiastek 3	3	-0,8799	-0,7398	1,1496	-0,3887
Pierwiastek 4	4	-0,8799	0,7398	1,1496	0,3887
MA					
Pierwiastek 1	1	0,9627	0,2863	1,0043	0,0460
Pierwiastek 2	2	0,9627	-0,2863	1,0043	-0,0460
Pierwiastek 3	3	-1,0000	0,0000	1,0000	0,5000
Pierwiastek 4	4	-3,6387	0,0000	3,6387	0,5000

Tabl. 7.5



Ilustracja 7.2: Model ARMAX(5,68;4; 4; t)

Z tabl. 7.4 wynika, że analizowany proces stochastyczny $PC1(t)$ przy poziomie ufności 95% jest błędzeniem przypadkowym (parametr przy zmiennej $PC1(t-1)^2$ na tym poziomie nie różni się istotnie od zera) ⁶.

Z kolei Tabl. 7.5 pozwala sądzić, że przy poziomie ufności 99% istotny jest poziom procesu i zależność od czwartego opóźnienia $PC1(t-4)$. Przy tym poziomie istotny jest również

⁶ Do identycznego wniosku można dojść zaokrąglając współczynniki (parametry strukturalne) do +/- 0,01.

trend liniowy procesu względem czasu t . Zatem odejmując od szeregu czasowego $PC1_t$ trend równy $Tr\ PC1 = 5,683 - 0,5119 t$ uzyskuje się szereg trendostacjonarny jednak na pograniczu szeregu nie stacjonarnego (pierwsze dwa moduły pierwiastków charakterystycznych w tabl. 7.5 b są większe od jedności nieznacznie). Jest to wynik "standardowy", powszechnie akceptowany⁷. W gruncie rzeczy predykcja tego typu nie wiele się różni od *prognozy naiwnej* będącej geometrycznym przedłużeniem trendu liniowego (np. przez ostatnie dwie realizacje procesu stochastycznego).

Prosta logika podpowiada, że trendy nie mogą zmierzać do $+\infty$ lub $-\infty$. W dalszym ciągu rozważymy ten problem na gruncie *teorii chaosu deterministycznego*.

Szereg czasowy $PC1_t$ posiada dwa punkty stałe przyciągający i odpychający (wzór 7.1). Zatem niektóre trendy nie liniowe⁸ powinny zmierzać do punktu stałego przyciągającego.

Niżej rozważymy trend logarytmiczny z parametrem sterującym r :

$$7.2 \quad Tr(t) = \ln(t') = r \ln t = r l_time$$

przy czym (w Tabl. 7.5 - 7.7) $r = 0,1=e$; $0,5=f$; 1 ; $5=a$; $10=b$; $20=c$; $100=d$.

Najciekawsze z uzyskanych rezultatów przedstawiono w Tabl. 7.5 - 7.7 i na ilustracjach 7.3 - 7.5.

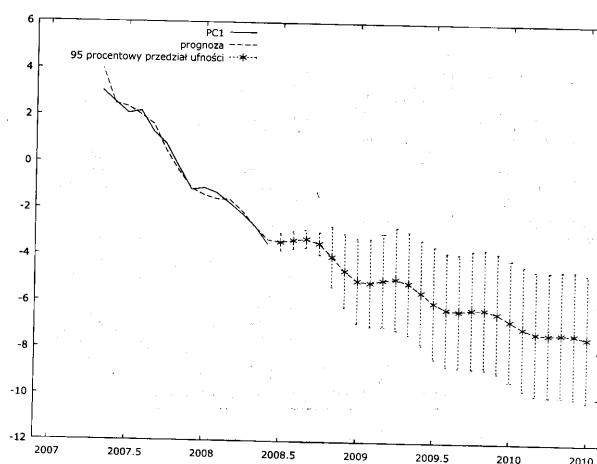
Tabl. 7.5

Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC1
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	12,6382	0,521740	24,223	<0,00001 ***
phi_1	0,736427	0,836490	0,880	0,37865
phi_2	-0,0144932	0,964922	-0,015	0,98802
phi_3	-0,836513	1,01057	-0,828	0,40780
phi_4	0,350923	0,895989	0,392	0,69531
theta_1	-0,505607	3,33339E+06	-0,000	1,00000
theta_2	-3,21958E-08	2,45684E+06	-0,000	1,00000
theta_3	0,505607	1,72126E+06	0,000	1,00000
theta_4	-1,00000	3,48565E+06	-0,000	1,00000
ci_time	-0,268343	0,0116624	-23,009	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,152348
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 2,13119
Średnia z zaburzeń losowych = -0,0569663
Wariancja z zaburzeń losowych = 0,0355038
Logarytm wiarygodności = -0,653102
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 23,3062
Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 30,3358
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 22,6555

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	-1,1457	0,0000	1,1457	0,5000
Pierwiastek 2	2	0,6460	-0,8332	1,0543	-0,1450
Pierwiastek 3	3	0,6460	0,8332	1,0543	0,1450
Pierwiastek 4	4	2,2374	0,0000	2,2374	0,0000
MA					
Pierwiastek 1	1	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
Pierwiastek 2	2	-1,0000	0,0000	1,0000	0,5000
Pierwiastek 3	3	0,2528	-0,9675	1,0000	-0,2093
Pierwiastek 4	4	0,2528	0,9675	1,0000	0,2093



*Ilustracja 7.3: Model
ARMAX(12,64;4;4;20 ln t)*

Identyczne wyniki do pokazanych na ilustracji 7.3 uzyskuje się dla parametru $r = 1$ i $r = 10$.

Wniosek I: trendy ($r \ln t$) dla $r = 1$; 10 ; 20 , zmierzają do atraktora (granicy) $PC1^* = -28,89$ będącego punktem stałym przyciągającym.

7 Chodzi oczywiście o "normalne" szeregi czasowe dla zmiennych ekonomicznych posiadających wymiar (miano).

Uzyskany rezultat odnosi się do głównej składowej (bez wymiarowej). Przytoczone rozumowanie jest jednak ogólne i można je zastosować również do zmiennych mianowanych. W szczególności zmiennych finansowych.

8 Teoria chaosu dotyczy tylko funkcji nie liniowych.

Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PCI
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-11,0099	3,27303	-3,364	0,00077 ***
phi_1	1,99197	0,00633332	314,522	<0,00001 ***
phi_2	-0,999457	0,00382964	-260,98	<0,00001 ***
theta_1	-0,907464	4421,55	-0,000	0,99984
theta_2	-0,0925356	409,310	-0,000	0,99982
el_time	78,3017	20,1980	3,877	0,00011 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,152348
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 2,13119
 Średnia z zaburzeń losowych = 0,00564345
 wariancja z zaburzeń losowych = 0,140411
 Logarytm wiarygodności = -11,889099
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 37,7782
 Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 42,2516
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 37,3641

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,9965	-0,0865	1,0003	-0,0138
Pierwiastek 2	2	0,9965	0,0865	1,0003	0,0138
MA					
Pierwiastek 1	1	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
Pierwiastek 2	2	-10,8067	0,0000	10,8067	0,5000

Tabl. 7.6

Wniosek II: trend $(0,1 \ln t)$ zmierza do nie stabilnego punktu stałego $PCI^{**} = 33,94$.

Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PCI
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	1,82808	2,30883	0,792	0,42849
phi_1	0,835530	0,450881	1,853	0,06387 *
phi_2	0,416075	0,581269	0,716	0,47411
phi_3	0,395933	0,422861	0,936	0,34911
phi_4	-0,735722	0,366419	-2,008	0,04466 **
theta_1	0,649518	116225	0,000	1,00000
theta_2	-0,00806809	40714,9	-0,000	1,00000
theta_3	-0,644881	39811,5	-0,000	0,99999
theta_4	-0,987295	114726	-0,000	0,99999
fl_time	-2,20149	2,83440	-0,777	0,43733

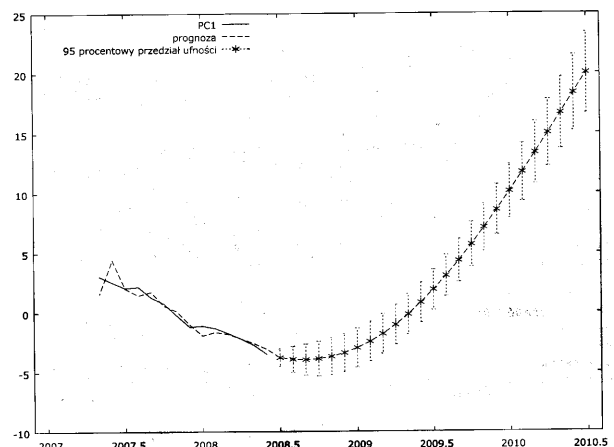
Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,152348
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 2,13119
 Średnia z zaburzeń losowych = 0,1883
 wariancja z zaburzeń losowych = 0,068471
 Logarytm wiarygodności = -6,8740468
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 35,7481
 Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 42,7777
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 35,0974

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,9988	0,1781	1,0145	0,0281
Pierwiastek 2	2	0,9988	-0,1781	1,0145	-0,0281
Pierwiastek 3	3	-0,7297	-0,8877	1,1491	-0,3595
Pierwiastek 4	4	-0,7297	0,8877	1,1491	0,3595
MA					
Pierwiastek 1	1	-1,0000	0,0000	1,0000	0,5000
Pierwiastek 2	2	1,0018	0,0000	1,0018	0,0000
Pierwiastek 3	3	-0,3275	-0,9507	1,0055	-0,3028
Pierwiastek 4	4	-0,3275	0,9507	1,0055	0,3028

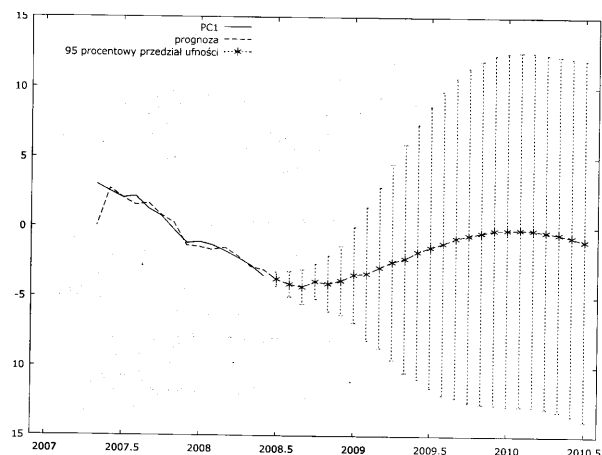
Tabl. 7.7

Wniosek III: trend $(0,5 \ln t)$ zawiera się pomiędzy punktami stałymi PCI^* odpychającym i PCI^{**} przyciągającym.

Jak już wspomniano szereg czasowy PCI zachowuje się tak jak gdyby był przybliżoną realizacją błędzenia przypadkowego. Przy poziomie ufności 95% nie można odrzucić hipotezy, że tak nie jest. Pokazuje to tabl. 7.8 na str. 13 (współczynnik przy ϕ_1 może być równy jedności wtedy $E(PCI_t) = t E(PCI_1)$ oraz $\sigma_t^2 = t \sigma^2$). Reszta tego modelu jest już procesem czysto losowym o rozkładzie normalnym co pokazują ilustracje 7.7 i 7.8 na następnej stronie.



Ilustracja 7.4: Model
 $ARMAX(-11,01;2;2; 0,1 \ln t)$



Ilustracja 7.5: Model
 $ARMAX(1,828;4;4; 0,5 \ln t)$

Tabl. 7.8

Model 13: Estymacja ARMA z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PC1
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

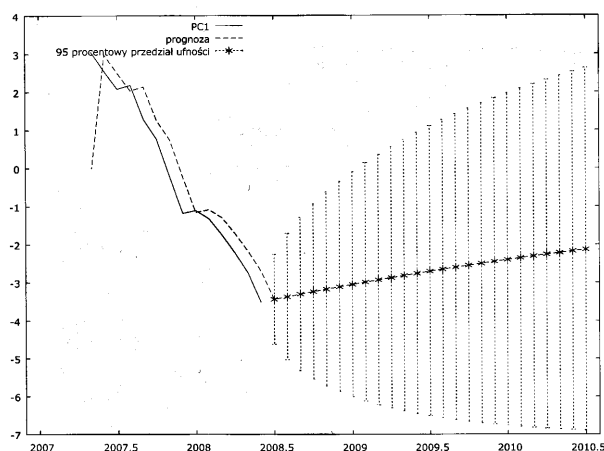
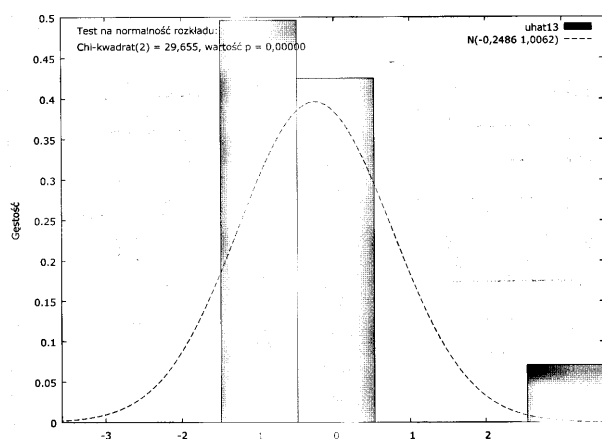
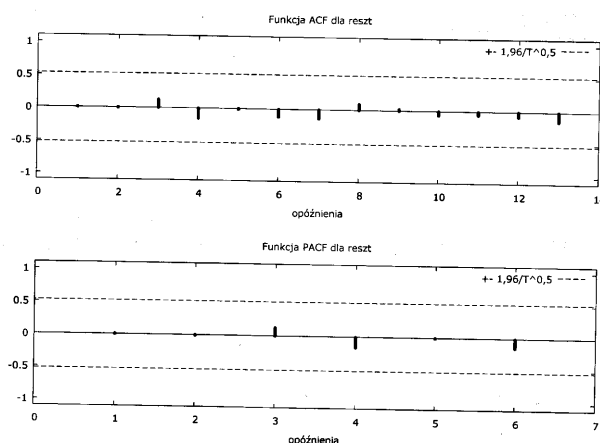
Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
phi_1	0,980266	0,0880600	11,132	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,152348
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 2,13119
 Średnia z zaburzeń losowych = -0,248603
 wariancja z zaburzeń losowych = 0,36499
 Logarytm wiarygodności = -14,431031
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 32,8621
 Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 34,1402
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 32,7437

część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR				
Pierwiastek 1	1,0201	0,0000	1,0201	0,0000

Test na normalność rozkładu reszt -
 Hipoteza zerowa: składnik losowy ma rozkład normalny
 Statystyka testu: Chi-kwadrat(2) = 29,6551
 z wartością p = 3,63481e-007

Zmienna	Współczynnik	95% Przedział ufności
phi_1	0,980266	(0,807671, 1,15286)

Ilustracja 7.6: $PC1_t=0,98 PC1_{t-1}$ Ilustracja 7.7: Rozkład reszt $e(t)$ modelu z ilustracji 7.6.Ilustracja 7.8: Korelogramy reszt $e(t)$ modelu z ilustracji 7.6.

Ostatecznie zatem można sformułować następujące całkowicie ogólne twierdzenia:

Twierdzenie 1. W przypadku gdy z procedury (modelu) $AR(1)$ wynika, że analizowany proces jest błędzeniem przypadkowym (przy założonym poziomie ufności współczynnik przy pierwszym opóźnieniu może być równy jedności), to należy poszukiwać atraktora (granicę) do którego zmierzają nie liniowe trendy tego szeregu.

Twierdzenie 2. Jeżeli dla szeregu czasowego X_t równanie:

$$7.4 \quad a^E + (b^E - 1)X_t + c^E X_t^2 = 0 \quad \text{gdzie } a^E, b^E, c^E \text{ s\k{a} estymatorami parametr\'{o}w } a, b, c \\ \text{uzyskanymi KMNK z szeregu czasowego o liczebno\'{s}ci } n \\ (t = 1, 2, \dots, n) \text{ i modelu 6.1a.}$$

ma dwa pierwiastki (miejsca zerowe) rzeczywiste to szereg czasowy posiada stabilny punkt stały przyciągający (atraktor) i nie stabilny punkt stały odpychający.

Dowód: Geometryczny. Styczne do paraboli w punktach przecięcia z prostą $X_t = X_{t-1}$ zawsze w jednym punkcie mają współczynnik kierunkowy > 1 a w drugi < 1 .

Twierdzenie 3. Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2, oraz:

$$7.5 \quad dX(t)/dX(t-1) = b^E + 2c^E X(X^R) = D \quad \text{gdzie } X^R = X^* \text{ lub } X^{**} \text{ jest jednym z dwu} \\ \text{miejsc zerowych równania 7.}$$

to $D > 1$ dla X^* (lub X^{}) i $D < 1$ dla X^{**} (X^*).**

Twierdzenie 4. Jeżeli spełnione są warunki twierdzeń 2, to istnieją nie liniowe trendy szeregu, które zmierzają do atraktora. Przy czym w pobliżu atraktora jest to zbliżanie poprzez wartości mniejsze i większe od niego.

Dowód: Zostały znalezione zatem istnieją.

W prognozowaniu dynamicznym należy zatem wypróbować nie liniowe trendy zmierzające do atraktora będącego punktem stałym przyciągającym.

Jak to pokazano Ttabl. 7.5 i na ilustracji 7.3 zadanie to dobrze spełnia funkcja logarytmiczna określona zależnością 7.2 na str. 11.

Istotny jest również wybór atraktora. Powinien to być punkt zbieżności do którego w przybliżeniu zdąża trend liniowy szeregu, otrzymany np. z **prognozy naiwnej** (prosta ekstrapolacja przez ostatnie wyrazy szeregu), albo z procedury numerycznej. Mianowicie:

$$7.6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^p \approx X^g \quad \text{gdzie } t = n \text{ oznacza ostatni wyraz analizowanego szeregu czasowego } X_t \\ \text{wskaźnik } p \text{ prognozę uzyskaną numerycznie}^{10} \text{ procedurą} \\ \text{ARMAX}(a, k, k, t), \text{ wskaźnik } g \text{ punkt stały przyciągający (atraktor).}$$

Przedstawiony sposób postępowania wynika z dostosowania osiągnięć teorii chaosu deterministycznego do obecnego stanu predykcji ekonomicznej (analitycy głównie ekstrapolują trendy liniowe).

Wykorzystanie trendów przeciwstawnych (np. ilustracja 7.4) i pośrednich (np. ilustracja 7.5) wydaje się zbyt ryzykowne. Ponad to wymagało by to starannych badań statystycznych wykluczających ewidentne przyczyny zewnętrzne zmieniające jakościowo szereg czasowy.

9 $X_t = X(t)$ jest funkcją kwadratową zmiennej $X(t-1)$ określoną równaniem 7.4 a symbolami d oznaczono pochodną względem tej zmiennej,

10 Np. Metodą Największej Wiarygodności.

7.2 Predykcja głównych składowych PC2 - PC8.

Na gruncie tego co zostało powiedziane w podrozdziale 7.1 możliwe są co najmniej trzy podstawowe modele trendu wynikające z koncepcji kwadratowego sprzężenia zwrotnego, a co za tym idzie poszukiwanie nieliniowych funkcji czasu zmierzających do atraktora, niestabilnego punktu stałego albo zawierających się pomiędzy nimi.

W dalszym ciągu, dla pozostałych głównych składowych, ograniczymy się do trendu określonego wzorem 7.2 z parametrem $r = 1$. Zwięzłe wyniki obliczeń przedstawiono w paragrafach: 7.2.1 do 7.2.7.

7.2.1 Składowa PC2.

Posiada dwa punkty stałe $PC2^* = -0,53$ i $PC2^{**} = -26,85$.

W tabl. 7.8 przytoczono model dla tej głównej składowej a na ilustracji 7.9 uzyskaną z niego prognozę dynamiczną.

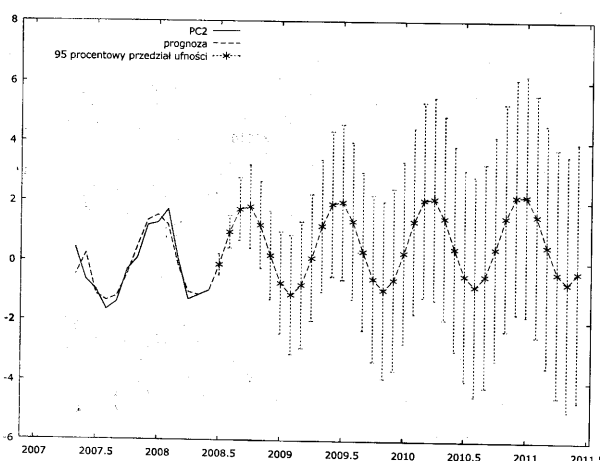
Tabl. 7.9

Model 24: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC2
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-1,34900	0,445627	-3,027	0,00247 ***
phi_1	1,63703	1,29240	1,267	0,20528
phi_2	-1,16455	1,95441	-0,596	0,55127
phi_3	0,108470	1,26983	0,085	0,93193
theta_1	-2,79776	176146	-0,000	0,99999
theta_2	2,79776	263076	0,000	0,99999
theta_3	-0,999999	143004	-0,000	0,99999
l_time	0,546217	0,187818	2,908	0,00363 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,25491
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 1,08724
Średnia z zaburzeń losowych = -0,0358908
Wariancja z zaburzeń losowych = 0,0324959
Logarytm wiarygodności = -4,4149423
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 26,8299
Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 32,5814
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 26,2975

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1		0,7653	-0,6448	1,0007	-0,1114
Pierwiastek 2		0,7653	0,6448	1,0007	0,1114
Pierwiastek 3		9,2055	0,0000	9,2055	0,0000
MA					
Pierwiastek 1		1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
Pierwiastek 2		0,8989	-0,4382	1,0000	-0,0722
Pierwiastek 3		0,8989	0,4382	1,0000	0,0722



Ilustracja 7.9: $PC2 = ARMAX(1,349;3;3;\ln t)$

Komentarz: Moduły pierwiastków charakterystycznych części AR szeregu, dla pierwszego i drugiego opóźnienia, bliskie są jedności (Tabl. 7.9) zatem proces stochastyczny PC2 najprawdopodobniej jest niestacjonarny. Przewidywana okresowość szeregu wynika z jego historii (do lipca 2008). Predykcja jego wartości liczbowych może być dobra dla horyzontu czasowego 3 do 5 miesięcy.

W tym ostatnim przypadku *został by przewidziany punkt zwrotny (!?)*.

7.2.2 Składowa PC3.

Posiada dwa punkty stałe: $PC3^* = 0,17$ i $PC3^{**} = -2,53$ (odpychający). Równanie kwadratowego sprzężenia zwrotnego nie miało parametrów istotnie różnych od zera przy poziomie ufności nawet 90%.

Model szeregu przytoczono w Tabl. 7.9 a wynikająca z niego prognozę pokazano na ilustracji 7.10.

Tabel. 7.10

Model 24: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PC3
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-1,53351	0,715903	-2,142	0,03219 **
phi_1	1,00222	0,221006	4,535	<0,00001 ***
phi_2	-0,802912	0,227308	-3,532	0,00041 ***
theta_1	-0,292749	1,09611E+07	-0,000	1,00000
theta_2	-0,707251	7,75222E+06	-0,000	1,00000
l_time	0,621673	0,299600	2,075	0,03799 **

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,0614795

Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 1,0707

Srednia z zaburzeń losowych = 0,0214978

wariancja z zaburzeń losowych = 0,175236

Logarytm wiarygodności = -10,560739

Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 35,1215

Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 39,5949

Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQ) = 34,7074

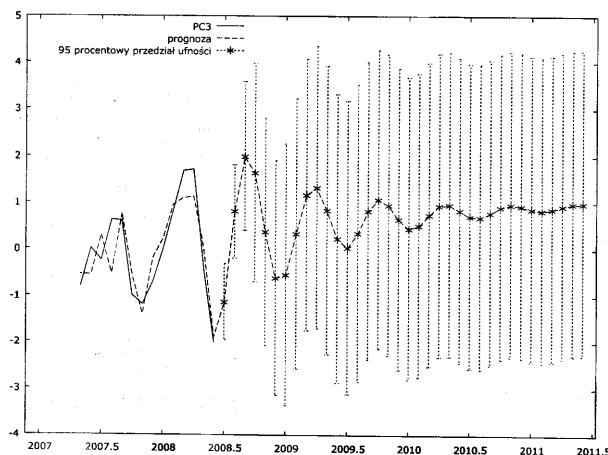
	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,6241	-0,9252	1,1160	-0,1555
Pierwiastek 2	2	0,6241	0,9252	1,1160	0,1555
MA					
Pierwiastek 1	1	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
Pierwiastek 2	2	-1,4139	0,0000	1,4139	0,5000

Test na normalność rozkładu reszt -

Hipoteza zerowa: składnik losowy ma rozkład normalny

Statystyka testu: Chi-kwadrat(2) = 3,66056

z wartością p = 0,160369



Ilustracja 7.10:

$$PC3 = ARMAX(-1,534; 2; 2; \ln t)$$

Komentarz: Szereg jest trendostacjonarny. Widać to na przytoczonej ilustracji (oscylacje wygasają).

7.2.3 Składowa PC4.

Punkty stałe: PC4* = -0,11 (atraktor) i PC4** = 35,30. Model nie ma parametrów istotnie różnych od zera nawet przy poziomie ufności 90%.

Model 25: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PC4
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	0,388842	0,845074	0,460	0,64542
phi_1	0,0158372	6,28105	0,003	0,99799
phi_2	-0,680698	3,08392	-0,221	0,82531
phi_3	-0,274817	7,80776	-0,035	0,97192
phi_4	0,152986	1,23742	0,124	0,90161
theta_1	0,630262	2,20937E+07	0,000	1,00000
theta_2	0,539900	1,21043E+07	0,000	1,00000
theta_3	1,07767	1,69944E+07	0,000	1,00000
theta_4	0,168032	3,11751E+06	0,000	1,00000
l_time	-0,186217	0,384358	-0,484	0,62804

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,0377579

Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,457101

Srednia z zaburzeń losowych = 0,00807586

wariancja z zaburzeń losowych = 0,00809126

Logarytm wiarygodności = -4,6308457

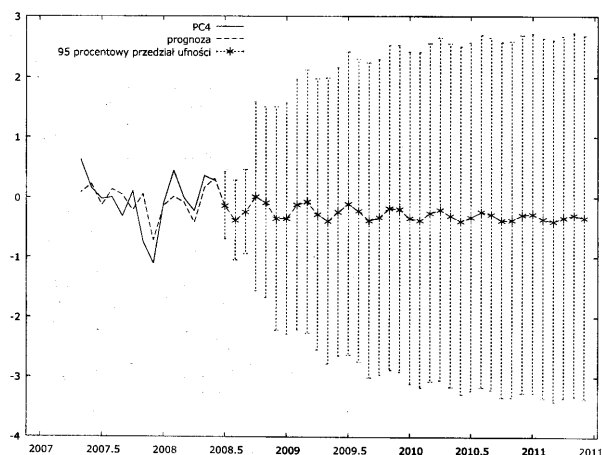
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 31,2617

Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 38,2913

Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQ) = 30,611

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	3,3109	0,0000	3,3109	0,0000
Pierwiastek 2	2	-1,8066	0,0000	1,8066	0,5000
Pierwiastek 3	3	0,1461	-1,0351	1,0454	-0,2277
Pierwiastek 4	4	0,1461	1,0351	1,0454	0,2277

Tabel. 7.11



Ilustracja 7.11:

$$PC4 = ARMAX(0,3888; 4; 4; \ln t)$$

Komentarz: Szereg trendostacjonarny zmierzający do atraktora: PC4 = -0,11.

7.2.4 Składowa PC5.

Punkty stałe: $PC5^* = 0,12$ (stabilny przyciągający) i $PC5^{**} = 1,22$. Parametry modelu nie istotnie różne od zera nawet przy poziomie ufności 90%.

Model 26: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC5
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

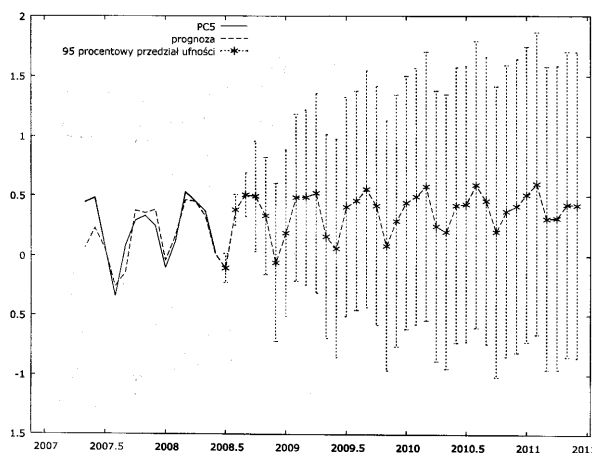
Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,184346	0,0733678	-2,513	0,01198 **
phi_1	-0,515525	0,191276	-2,695	0,00703 ***
phi_2	-0,805792	0,201570	-3,998	0,00006 ***
phi_3	-0,453876	0,140947	-3,220	0,00128 ***
phi_4	-0,933538	0,112679	-8,285	<0,00001 ***
theta_1	0,853078	837450	0,000	1,00000
theta_2	-0,0355962	1,23527E+06	-0,000	1,00000
theta_3	-1,09341	1,20034E+06	-0,000	1,00000
theta_4	-0,724068	1,18858E+06	-0,000	1,00000
l_time	0,155747	0,0321421	4,846	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 0,215629
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,25023
Średnia z zaburzeń losowych = 0,0399933
Wariancja z zaburzeń losowych = 0,003888
Logarytm wiarygodności = 11,918931
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -1,83786
Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 5,19177
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = -2,48858

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	-0,6842	-0,7385	1,0067	-0,3689
Pierwiastek 2	2	-0,6842	0,7385	1,0067	0,3689
Pierwiastek 3	3	0,4411	-0,9286	1,0281	-0,1794
Pierwiastek 4	4	0,4411	0,9286	1,0281	0,1794

Tabl. 7.12

Komentarz. Szereg trendostacjonarny zmierzający do atraktora: $PC5 = 0,12$.



Ilustracja 7.12:

$$PC5 = ARMAX(4;4;\ln t)$$

7.2.5 Składowa PC6.

Punkty stałe: $PC6^* = 2,33$ i $PC6^{**} = 0,95$ (nie stabilny).

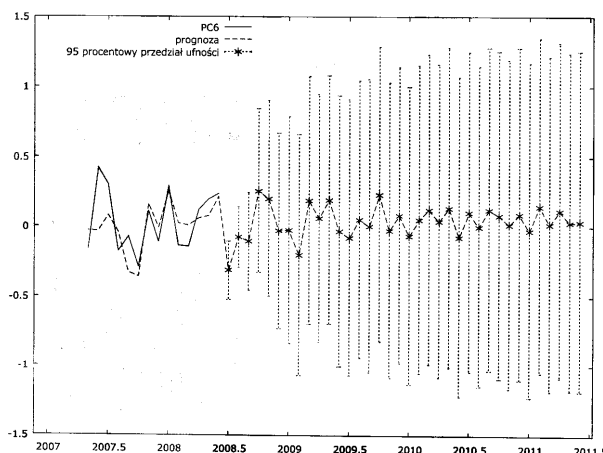
Tabl. 7.13

Model 24: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC6
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,0900440	0,104809	-0,859	0,39027
phi_1	-0,965956	0,371457	-2,600	0,00931 ***
phi_2	-0,323766	0,332247	-0,974	0,32982
phi_3	-0,742477	0,308982	-2,403	0,01626 **
phi_4	-0,821576	0,221264	-3,713	0,00020 ***
theta_1	0,657581	2,74681E+06	0,000	1,00000
theta_2	-0,647293	4,55306E+06	-0,000	1,00000
theta_3	-0,961364	2,77507E+06	-0,000	1,00000
theta_4	-0,0489241	134385	-0,000	1,00000
l_time	0,0382441	0,0438328	0,873	0,38294

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 0,0429206
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,224851
Średnia z zaburzeń losowych = 0,0361693
Wariancja z zaburzeń losowych = 0,0113269
Logarytm wiarygodności = 6,8750667
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 8,24987
Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 15,2795
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 7,59915

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	-0,9366	-0,4068	1,0211	-0,4348
Pierwiastek 2	2	-0,9366	0,4068	1,0211	0,4348
Pierwiastek 3	3	0,4847	-0,9656	1,0804	-0,1760
Pierwiastek 4	4	0,4847	0,9656	1,0804	0,1760



Ilustracja 7.13:

$$PC6 = ARIMAX(-0,9004;4;4;\ln t)$$

Komentarz. Szereg trendostacjonarny.

7.2.6 Składowa PC7.

Punkty stałe: $PC7^* = -0,04$ (nie stabilny) i $PC7^{**} = -0,32$.

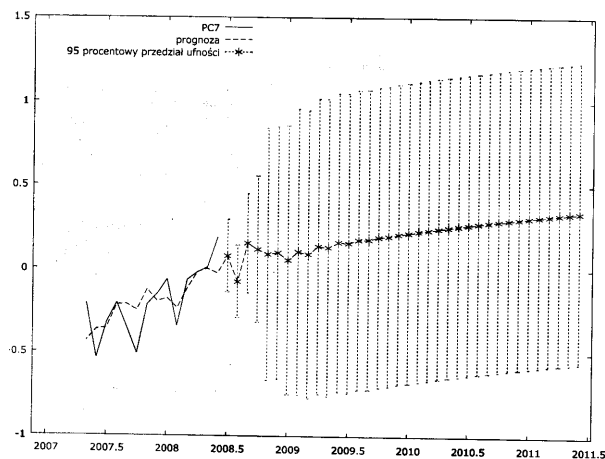
Tabl. 7.14

Model 27: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC7
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,954266	0,342119	-2,789	0,00528 ***
phi_1	-0,353394	0,702859	-0,503	0,61511
phi_2	0,436374	0,907618	0,481	0,63067
phi_3	-0,167889	1,06369	-0,158	0,87459
phi_4	-0,224394	0,992979	-0,226	0,82122
theta_1	0,428355	4,02883E+06	0,000	1,00000
theta_2	-0,672657	2,15196E+06	-0,000	1,00000
theta_3	0,428355	3,20667E+06	0,000	1,00000
theta_4	1,00000	6,39838E+06	0,000	1,00000
1_time	0,324285	0,160673	2,018	0,04356 **

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,200001
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,20176
Średnia z zaburzeń losowych = -0,00514132
wariancja z zaburzeń losowych = 0,0122188
Logarytm wiarygodności = 8,6177347
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 4,76453
Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 11,7942
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 4,11381

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	-1,4427	0,1748	1,4533	0,4808
Pierwiastek 2	2	-1,4427	-0,1748	1,4533	-0,4808
Pierwiastek 3	3	1,0686	-0,9840	1,4526	-0,1184
Pierwiastek 4	4	1,0686	0,9840	1,4526	0,1184



Ilustracja 7.14:

$$PC7 = \text{ARMAX}(-0,9543; 4; 4; \ln t)$$

Komentarz. Szereg trendostacjonarny.

2.2.7 Składowa PC8.

Punkty stałe: $PC8^* = 0,04$ i $PC8^{**} = -0,50$ (nie stabilny).

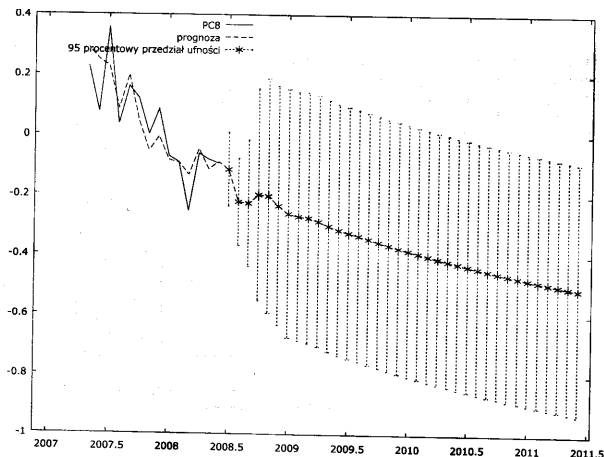
Model 25: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 14 obserwacji 2007:05-2008:06
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC8
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	0,827934	0,0742063	11,157	<0,00001 ***
phi_1	0,332245	0,401375	0,828	0,40780
phi_2	-0,487873	0,514015	-0,949	0,34255
phi_3	-0,0252622	0,492515	-0,051	0,95909
theta_1	-0,972361	757101	-0,000	1,00000
theta_2	0,972361	554367	0,000	1,00000
theta_3	-1,00000	930290	-0,000	1,00000
1_time	-0,335515	0,0316619	-10,597	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 0,0297774
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,156209
Średnia z zaburzeń losowych = -0,00473929
wariancja z zaburzeń losowych = 0,00393828
Logarytm wiarygodności = 16,418047
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -14,8361
Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = -9,08458
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = -15,3685

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,3769	-1,3530	1,4045	-0,2068
Pierwiastek 2	2	0,3769	1,3530	1,4045	0,2068
Pierwiastek 3	3	-20,0661	0,0000	20,0661	0,5000

Tabl. 7.15



Ilustracja 7.15:

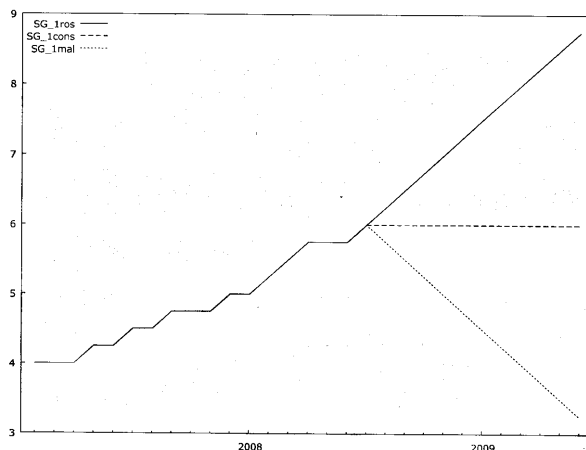
$$PC8 = \text{ARMAX}(0,8279; 3; 3; \ln t)$$

Komentarz. Szereg trendostacjonarny zmieniający do niestacjonarnego punktu stałego (odpychającego) $PC8^* = -0,50$.

Andrzej Kasprzycki. Teoria prognozy dynamicznej.

7.3 Predykcja dynamiczna inflacji (I1), koniunktury (KP) i bezrobocia (B).

Modele statyczne dla zmiennych endogenicznych (zależnych) I1, KP i B polskiego systemu gospodarczego¹¹, przytoczono w Tabl. 7,3 na stronie 9. Zmienna niezależna (z góry ustalona) SG (stopa główna NBP), opóźniona o jeden miesiąc (SG_1), podlegać będzie symulacjom trzy wariantowym zmianą w horyzoncie prognozy¹² pokazanym na ilustracji 7.16:



Ilustracja 7.16: Rzeczywista (do 06.200) opóźniona o jeden miesiąc i symulacyjna (3 wariantowa) zmiana głównej stopy % NBP.

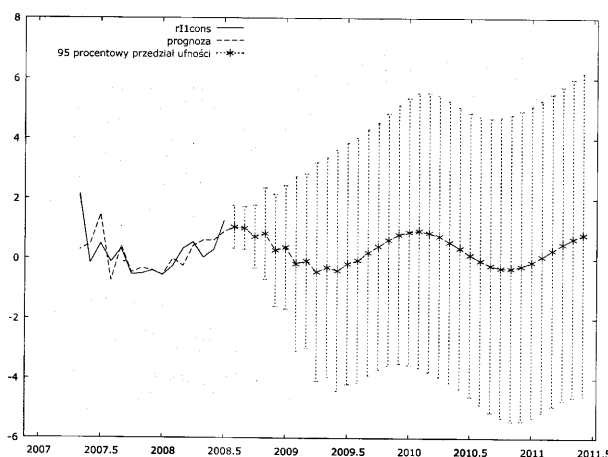
Wstawiając poszczególne warianty zmiennej niezależnej SG_1 (ros, cons i mal), oraz prognozy dynamiczne dla zmiennych objaśniających PC1 - PC8 (podrozdział 7.2), do modelu 6 z Tabl. 7.3. uzyskuje się model tendencji rozwojowej dla zmiennej endogenicznej I1. Z kolei z części stochastycznej¹³ otrzymuje się prognozę ex post dla reszt modelu.

Dla przypadku pozostawienia bez zmian głównych stup procentowych NBP dla całego horyzontu predykcji, prognozę reszt modelu 6 z Tabl. 7.3 podano w Tabl. 7.16 i pokazano na ilustracji 7.17:

Estymacja ARMA z wykorzystaniem 15 obserwacji 2007:05-2008:07
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: r1lcons
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	0,296461	0,161508	1,836	0,06642 *
phi_1	0,282902	0,429853	0,658	0,51045
phi_2	1,30362	0,380422	3,427	0,00061 ***
phi_3	-0,342851	0,343040	-0,999	0,31758
phi_4	-0,650278	0,361434	-1,799	0,07199 *
theta_1	-0,293550	735671	-0,000	1,00000
theta_2	-1,18860	432193	-0,000	1,00000
theta_3	-0,293547	523798	-0,000	1,00000
theta_4	0,999998	727231	0,000	1,00000

Tabl. 7.16



Ilustracja 7.17: Prognoza reszt modelu tendencji rozwojowej dla I1 i SG = cons uzyskana procedurą ARMA(-0,2965;4;4) z Tabl. 7.16.

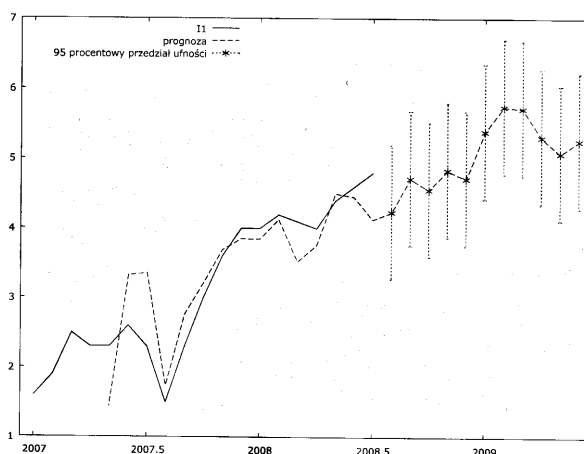
11 Jest to przykład dydaktyczny (metodyczny). Rozważane szeregi czasowe nie zostały wybrane na podstawie określonej teorii ekonomicznej a poza tym są zbyt krótkie ($n < 100$).

12 Horyzont prognozy, czyli jej wyprzedzenie w czasie, został wybrany arbitralnie i jest zbyt długi (w/g niektórych badaczy nie powinien przekraczać interwału $1/3$ n). Zostało to zrobione w celu uzyskania efektu wizualnego.

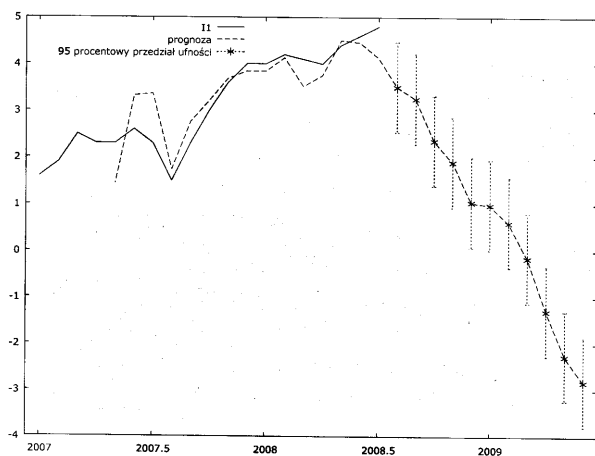
13 Oznaczenie w tabelach: r1const = I1 - pr1cons.

Dodając prognozę reszt do prognozy części deterministycznej modelu, uzyskuje się poprawiony model tendencji rozwojowej inflacji ($prI1consII$).

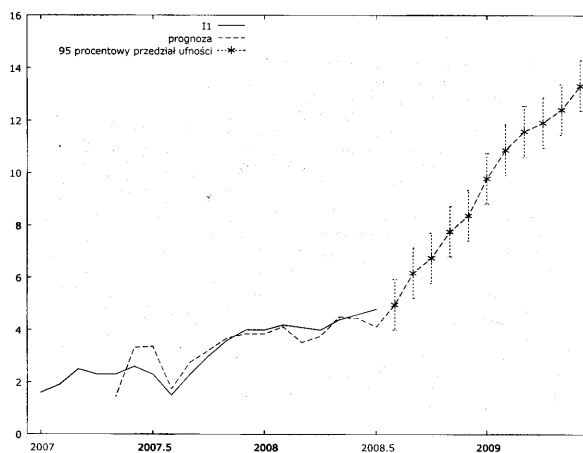
W przypadku pozostawienia głównej stopy NBP na poziomie 6% w horyzoncie prognozy, dla inflacji ($I1$) zostało to pokazane na ilustracji 7.18. Ilustracje 7.19 i 7.20 pokazują natomiast symulacyjną zmianę inflacji odpowiednio dla regularnego podnoszenia głównej stopy procentowej NBP i regularnego jej obniżania, zgodnie z założonym schematem pokazanym na ilustracji 7.16:



Ilustracja 7.18: Symulacja zmiany inflacji z $ARMAX(1,134;0;0;I1=1,13+0,68prI1consII)$. SG stałe.

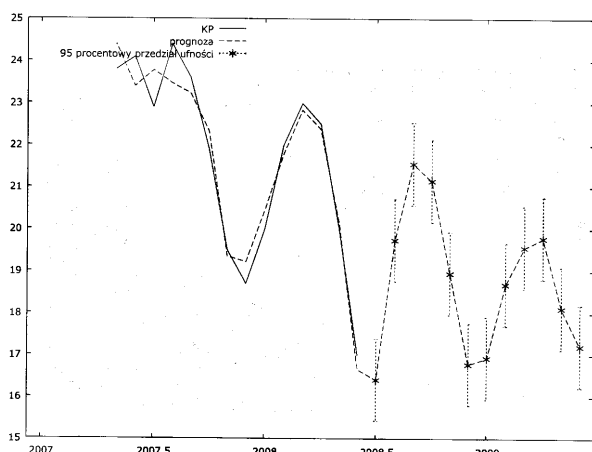


Ilustracja 7.19: Symulacyjna zmiana inflacji z modelu $ARMAX(1,134;0;0;I1=1,13+0,68prI1rosII)$. SG rosnące.

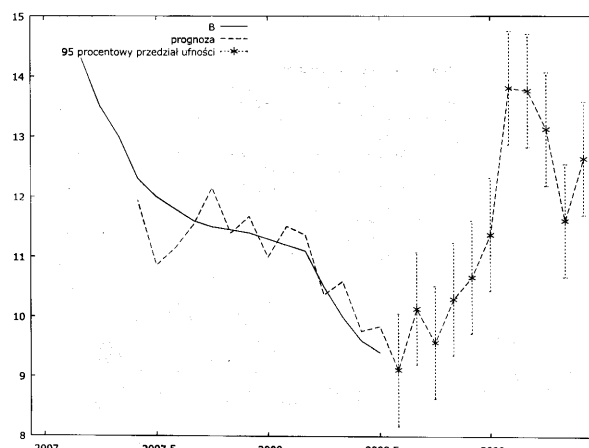


Ilustracja 7.20: Symulacyjna zmiana inflacji z modelu $ARMAX(1,134;0;0;I1=1,13+0,68prI1malII)$. SG malejące.

Ilustracje 7.21 i 7.22 na następnej stronie pokazują symulacyjne przewidywane zmiany koniunktury w przemyśle (KP) i stopy bezrobocia (B) dla przypadku pozostawienia głównej stopy NBP na poziomie 6%, również w najbliższej przyszłości.



Ilustracja 7.21: Prognoza koniunktury w przemyśle (KP) z modelu $ARMAX(0,0,KP=-1,75+1,08prKPconsII)$. SG stałe.

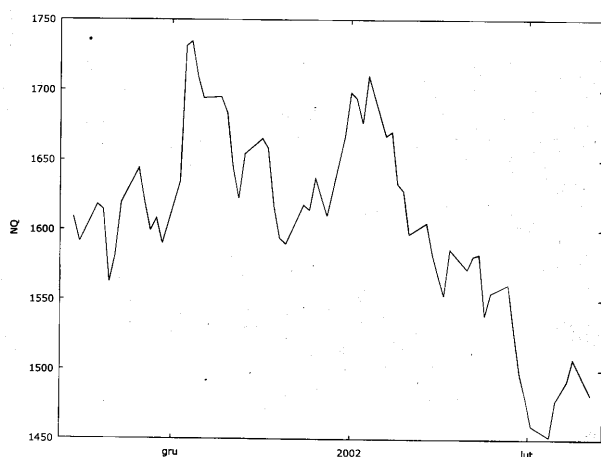


Ilustracja 7.22: Prognoza stopy bezrobocia (B) z modelu $ARMAX(3,645;0;0;B=3,65+0,67prBconsII)$. SG stałe.

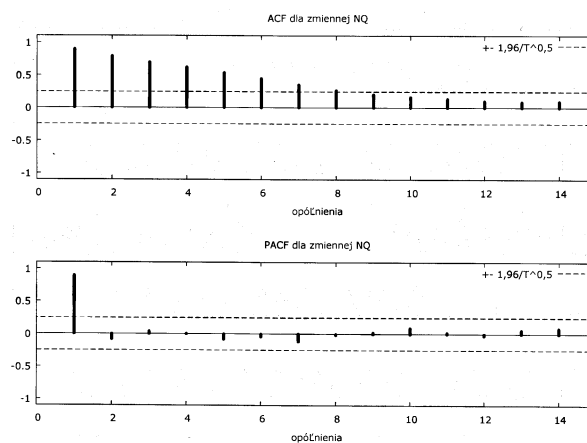
8. Przykład obliczeniowy dla najwyższych wartości indeksu giełdowego NASDAQ.

8.1 Zastosowanie teorii chaosu.

Na ilustracji 8.1 pokazano zmianę najwyższych wartości indeksu giełdowego NASDAQ (oznaczenie NQ) z kolejnych sesji od 15.11.2001 do 15.02.2002 $\Delta t = 1$ dzień z pominięciem sobót i niedziel). Wykres sporządzono na podstawie danych liczbowych zaczerpniętych z [8, str. 252].



Ilustracja 8.1: Najwyższe wartości indeksu NASDAQ.



Ilustracja 8.2: Korelogramy szeregu czasowego z Ilustracji 8.1.

Na Ilustracji 8.2 pokazano funkcję autokorelacji zaobserwowanej realizacji tego procesu stochastycznego. Zgodnie z zaleceniem [5, str. 281, p-kt 3] do szeregu należy wstępnie zastosować model $AR(1)$ i ewentualnie rozszerzyć go o dalsze opóźnienia aż do momentu otrzymania procesu resztowego będącego białym szumem.

Zostało to przytoczone w Tabl. 8.1 dla procedury $AR(a;1)$ zastosowanej np. w [8, str. 253]. Reszty tego modelu (Tabl. 8.1) są już gusowskim białym szumem co dokumentują Ilustracje 8.3 i 8.4 (brak autokorelacji przy poziomie ufności 95%). Dwa parametry tego modelu są istotnie różne od zera

na poziomie ufności 99% (oznaczenie ***).

Model 5: Estymacja ARMA z wykorzystaniem 63 obserwacji 01/11/15-02/02
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: NQ
 Błędy standardowe na bazie Hessian

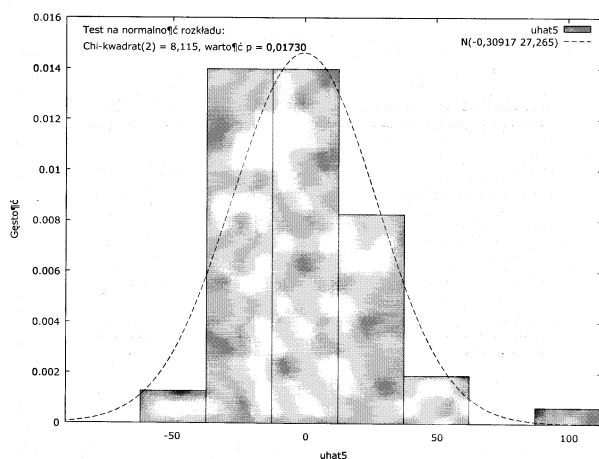
	współczynnik	błąd standardowy	t-Student	wartość p
const	1587,72	39,6179	40,08	0,000 ***
phi_1	0,926720	0,0452177	20,49	2,40E-093 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,58
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 68,6265
 Średnia z zaburzeń losowych = -0,309174
 wariancja z zaburzeń losowych = 713,646
 Logarytm wiarygodności = -297,33914
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 600,678
 Kryterium bayesowskie Schwarz'a (BIC) = 607,108
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 603,207

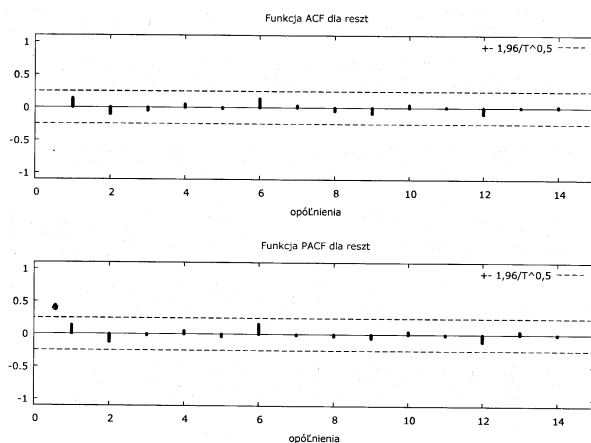
	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek	1	1,0791	0,0000	1,0791	0,0000

Test na normalność rozkładu reszt -
 Hipoteza zerowa: składnik losowy ma rozkład normalny
 Statystyka testu: Chi-kwadrat(2) = 8,1146
 z wartością p = 0,0172956

Tabl. 8.1



Ilustracja 8.3: Rozkład statystyczny reszt modelu z Tabl. 8.1



Ilustracja 8.4: Korelogramy reszt modelu z Tabl. 8.1.

Z kolei Tabl. 8.2 zawiera rezultaty estymacji procedurą AR(1) nie zawierającą wyrazu wolnego. Jeden parametr tego modelu jest istotnie różny od zera na poziomie ufności 99%. Reszty modelu są gusowskim białym szumem co pokazują Ilustracje 8.5 i 8.6.

Model 7: Estymacja ARMA z wykorzystaniem 63 obserwacji 01/11/15-02/02/
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: NQ
 Błędy standardowe na bazie Hessian

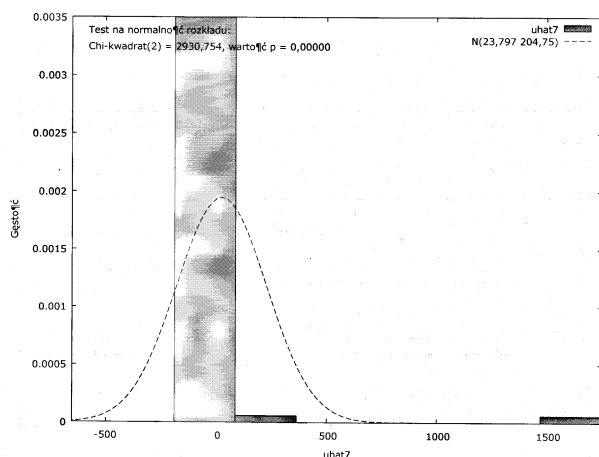
	współczynnik	błąd standardowy	t-Student	wartość p
phi_1	0,999846	0,000219055	4564	0,000 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,58
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 68,6265
 Średnia z zaburzeń losowych = 23,7968
 Wariancja z zaburzeń losowych = 739,866
 Logarytm wiarygodności = -301,5382
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 607,076
 Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 611,363
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 608,762

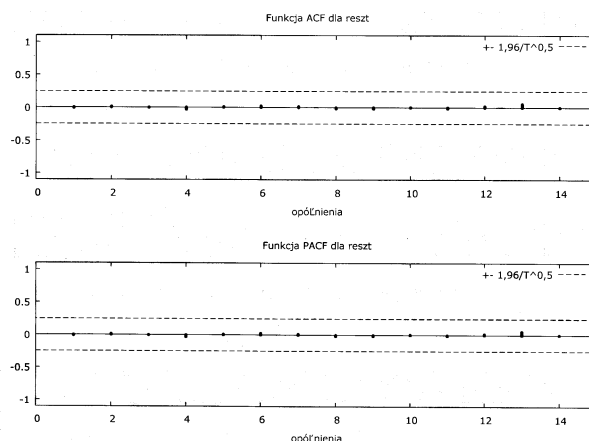
	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	1,0002	0,0000	1,0002	0,0000

Test na normalność rozkładu reszt -
 Hipoteza zerowa: składnik losowy ma rozkład normalny
 Statystyka testu: Chi-kwadrat (2) = 2930,75
 z wartością p = 0

Tabl. 8.2



Ilustracja 8.5: Rozkład statystyczny reszt modelu z Tabl. 8.2



Ilustracja 8.6: Korelogram reszt modelu z Tabl. 8.2.

Model z Tabl. 8.2 jest zaistniałą realizacją błędzenia przypadkowego¹⁴ (tej ewentualności nie można odrzucić na poziomie ufności 99%). Potwierdzają to również badania większości specjalistów, stwierdzających, że w szeregach finansowych i giełdowych dopiero różnice ich wartości są procesami czysto losowymi.

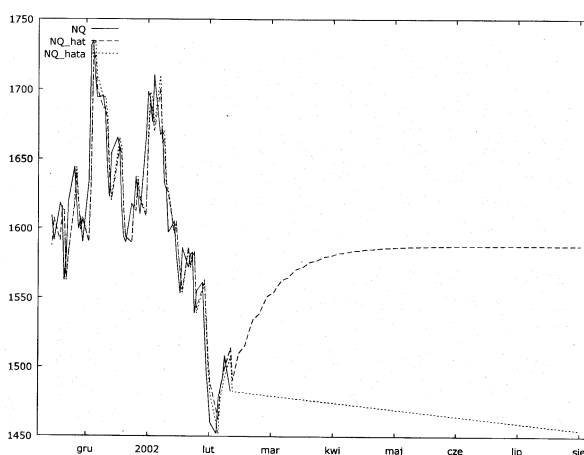
Zauważymy również, że błąd standardowy parametru stojącego przy pierwszym opóźnieniu szeregu w Tabl. 8.2 jest o dwa rzędy wielkości mniejszy niż w modelu z dwoma parametrami (Tabl. 8.1).

Korelogramy procesu resztowego z Tabl. 8.2 są również lepsze.

Najważniejsza jest jednak klasyfikacja: model z Tabl. 8.1 jest stacjonarny a z Tabl. 8.2 niestacjonarny.

Uzyskane z obu modeli prognozy dynamiczne pokazano na ilustracji 8.7.

¹⁴ Błędzenie przypadkowe otrzymuje się również po zaokrągleniu w Tab. 8.1 wyników obliczeń (współczynnika lub modułu) do 3 miejsc po przecinku.



Ilustracja 8.7: NQ_hat prognoza z modelu z Tabl. 8.1 (stacjonarny). NQ_hata prognoza z modelu z Tabl. 8.2 (przybliżenie błędzenia przypadkowego).

Otrzymane prognozy dynamiczne są absolutnie przeciwstawne. Pierwsza przewiduje wzrost indeksu NASDAQ a druga jego malenie.

Zaistniała sprzeczność (pozorna bo prawidłowy jest model błędzenia przypadkowego) znajduje wytłumaczenie w nieliniowości modelu stacjonarnego i filozofii chaosu deterministycznego (patrz przypis końcowy ¹⁾).

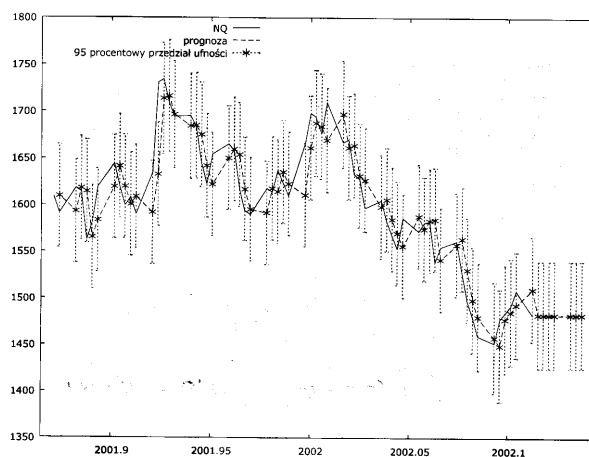
Na gruncie teorii chaosu deterministycznego z iteracji funkcji kwadratowej, KMNK uzyskuje się model przytoczony w Tabl. 8.3 oraz prognozę statyczną pokazaną na ilustracji 8.8:

Estymacja KMNK z wykorzystaniem 62 obserwacji 01/11/16-02/02/11
Zmienna zależna: NQ

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-1437,48	1555,36	-0,924	0,35914
NQ_1	2,85994	1,95237	1,465	0,14827
sq_NQ_1	-0,000600527	0,000612019	-0,981	0,33049

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,51
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 69,1843
Suma kwadratów reszt = 44058
Błąd standardowy reszt = 27,3267
Wsp. determinacji R-kwadrat = 0,849103
Skorygowany wsp. R-kwadrat = 0,843988
Statystyka F (2, 59) = 165,998 (wartość p < 0,00001)
Statystyka testu Durбина-Watsona = 1,6775
Autokorelacja reszt rzędu pierwszego = 0,151685
Logarytm wiarygodności = -291,524
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 589,048
Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 595,43
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 591,554

Tabl. 8.3



Ilustracja 8.8: Predykcja z modelu:
 $NQ_{t+1} = -1437 + 2,86NQ_t - 0,0006NQ_t^2$

Z równań 6.1 (str. 6) uzyskuje się:

8.1 a $NQ^* = 1615,17$ punkt stały przyciągający,

8.1 b $NQ^{**} = 1482,01$ punkt stały odpychający.

Zauważymy, że ostatnia obserwacja rozważanego szeregu czasowego jest niezwykle bliska wartości NQ^{**} . Jest mianowicie: $NQ_{63} = 1482,57$.¹⁵

Zgodnie z tym co zostało powiedziane w [4, str. 22 Rys.5.3] wszystkie trendy zbliżające się do tego punktu są odpychane w kierunku wartości większych, jeżeli przechodzą powyżej tego punktu, lub mniejszych, jeżeli przebiegają poniżej. Część stochastyczna modelu może jednak tą regułę zmienić. Zatem w pobliżu punktu stałego odpychającego możemy jedynie być pewni, że trendy zostaną odchylone w kierunku wzrastających wartości zmiennej objaśnianej (dodatni kierunek osi y) lub malejących.

Wykorzystując trend określony wzorem 7.2 (na stronie 11) w Tabl. 8.4 przytaczamy rezultaty uzyskane dla: $X01 = NQ(t) = 0,1 \ln t$. Na ilustracji 8.9 (następna strona) pokazano prognozę *ex ante* tego trendu.

Model ten (Tabl. 8.4) jest trendostacjonarny (wszystkie moduły pierwiastków części AR są większe od jedności) jak również część losowa modelu (ilustracja 8.9) spowodowała przejście szeregu poniżej punktu NQ^{**} (1482,01). Zatem jest obserwowana kontynuacja trendu spadkowego. Ten sam model generowany nieco wcześniej, również MNW, dał inne wyniki i zdecydowanie odmienny trend dla horyzontu prognozy, zbliżający się do atraktora NQ^{**} poprzez wartości mniejsze.

Zostało to unaocznione w Tabl. 8.5 i pokazane na ilustracji 8.10. Rozkład statystyczny i autokorelogramy reszt tego modelu (Tabl. 8.5) pokazano na ilustracjach 8.11 i 8.12.

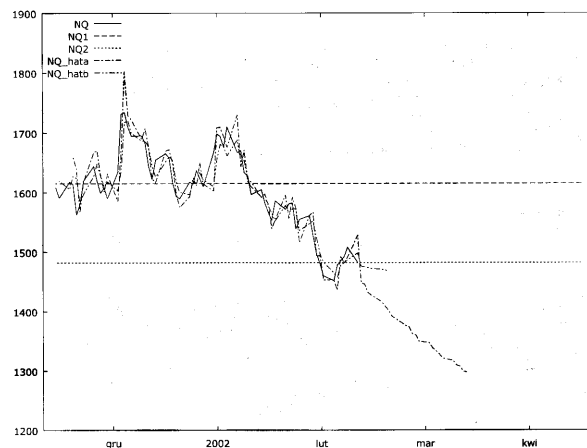
Model 14: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 63 obserwacji 01/11/15-02/02/11
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: NQ
Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	2207,12	31,2587	70,608	<0,00001 ***
phi_1	0,118974	0,155339	0,766	0,44374
phi_2	1,81937	0,150070	12,123	<0,00001 ***
phi_3	-0,0977797	0,152952	-0,639	0,52264
phi_4	-0,850091	0,147024	-5,782	<0,00001 ***
theta_1	1,49539	161726	0,000	0,99999
theta_2	-0,150859	80117,1	-0,000	1,00000
theta_3	-1,09818	104515	-0,000	0,99999
theta_4	-0,451934	73089,3	-0,000	1,00000
X01	-2620,57	438,495	-5,976	<0,00001 ***

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,58
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 68,6265
Średnia z zaburzeń losowych = -9,0212
Wariancja z zaburzeń losowych = 977,224
Logarytm wiarygodności = -310,75899
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 643,518
Kryterium bayesowskie Schwarz'a (BIC) = 667,092
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 652,79

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	-1,0676	0,1027	1,0725	0,4847	
Pierwiastek 2	-1,0676	-0,1027	1,0725	-0,4847	
Pierwiastek 3	1,0100	-0,0502	1,0113	-0,0079	
Pierwiastek 4	1,0100	0,0502	1,0113	0,0079	
MA					
Pierwiastek 1	-1,0000	0,0000	1,0000	0,5000	
Pierwiastek 2	-1,2949	0,4805	1,3812	0,4434	
Pierwiastek 3	-1,2949	-0,4805	1,3812	-0,4434	
Pierwiastek 4	1,1599	0,0000	1,1599	0,0000	

Tabl. 8.4



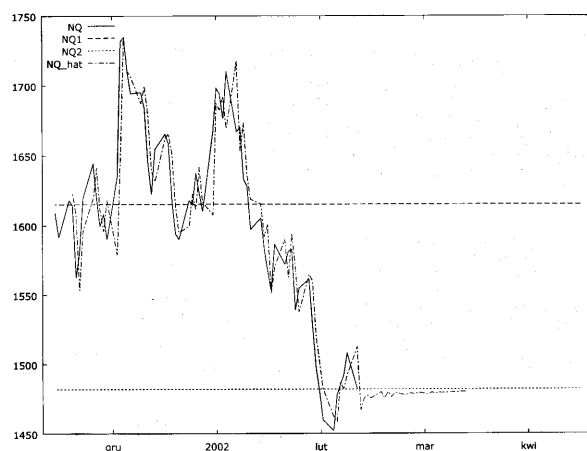
Ilustracja 8.9: $NQ1 = NQ^* = 1615,17$;
 $NQ2 = NQ^{**} = 1482,01$; NQ_hata = prognoza
ARMAX(2207,12;4;4;0,1ln t). NQ_hato
inna prognoza z takiego samego modelu.

¹⁵ W prezentowanych tabelach i ilustracjach przyjęto 5 dniowy regularny tydzień pracy giełdy, co wygenerowała datę 11.02.2002. W rzeczywistości był to dzień 15.02.2002.

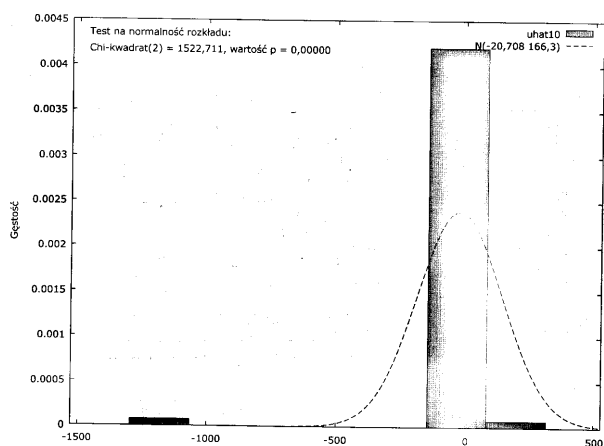
Model 10: Estymacja ARMAX z wykorzystaniem 63 obserwacji 01/11/15-02/02/11
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: NQ
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	2790,34	32,2981	86,393	<0,00001 ***
phi_1	0,104873	0,175833	0,596	0,55089
phi_2	1,76319	0,210807	8,364	<0,00001 ***
phi_3	0,0353953	0,107091	0,331	0,74101
phi_4	-0,907313	0,143186	-6,337	<0,00001 ***
theta_1	1,60320	22471,3	0,000	0,99994
theta_2	0,101504	17294,8	0,000	1,00000
theta_3	-0,957362	14797,1	-0,000	0,99995
theta_4	-0,353986	8412,44	-0,000	0,99997
X01	-3182,57	514,365	-6,187	<0,00001 ***

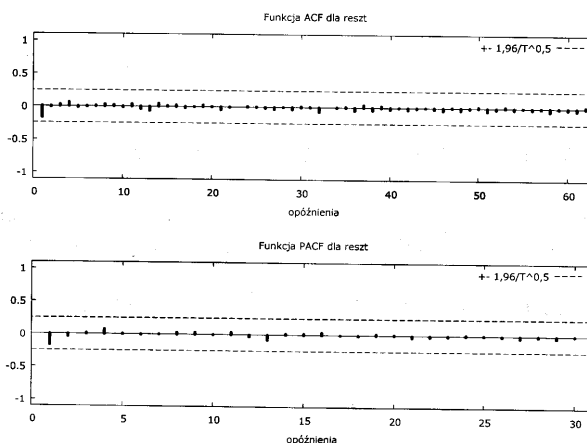
Tabl. 8.5



Ilustracja 8.10: NQ_hat prognoza z modelu $ARMAX(2790,34;4;4;0,1ln t)$. Tabl. 8.4.
 $NQ1=1615,17$; $NQ2=1482,01$.



Ilustracja 8.11: Rozkład statystyczny reszt modelu z Tabl. 8.4.



Ilustracja 8.12: Autokorelogramy reszt modelu z Tabl. 8.4.

Na zakończenie w Tabl. 8.6 przytaczamy jeszcze inny model tego samego szeregu czasowego NQ a na ilustracji 8.13 otrzymaną z niego prognozę dynamiczną:

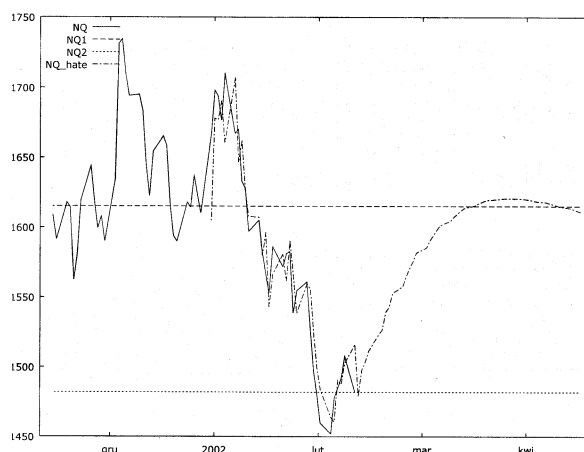
Model 16: Estymacja ARMA z wykorzystaniem 63 obserwacji 01/11/15-02/02/11
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: NQ
 Błędy standardowe na bazie Outer Products matrix

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	1593,95	20,6761	77,091	<0,00001 ***
phi_1	0,408590	0,244599	1,670	0,09483 *
phi_2	1,28816	0,236072	5,457	<0,00001 ***
phi_3	-0,101911	0,229898	-0,443	0,65756
phi_4	-0,610546	0,190748	-3,201	0,00137 ***
theta_1	0,771235	38697,5	0,000	0,99998
theta_2	-0,848784	67962,0	-0,000	0,99999
theta_3	-0,965198	35021,5	-0,000	0,99998
theta_4	0,0427462	1624,22	0,000	0,99998

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,58
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 68,6265
 Średnia z zaburzeń losowych = 1,62333
 wariancja z zaburzeń losowych = 576,098
 Logarytm wiarygodności = -293,12795
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 606,256
 Kryterium bayesowskie Schwarz (BIC) = 627,687
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQ) = 614,685

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	1,0433	0,0595	1,0449	0,0091
Pierwiastek 2	2	1,0433	-0,0595	1,0449	-0,0091
Pierwiastek 3	3	-1,1267	-0,4801	1,2247	-0,4359
Pierwiastek 4	4	-1,1267	0,4801	1,2247	0,4359
MA					
Pierwiastek 1	1	-0,9070	0,4211	1,0000	0,4308
Pierwiastek 2	2	-0,9070	-0,4211	1,0000	-0,4308
Pierwiastek 3	3	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
Pierwiastek 4	4	23,3937	0,0000	23,3937	0,0000

Tabl. 8.6



Ilustracja 8.13: Prognoza dynamiczna (*ex ante*) z modelu ARMA(1593,95;4;4). Tabl. 8.5.
 $NQ1=1615,17$; $NQ2=1482,01$; $\text{śred}=1604,6$

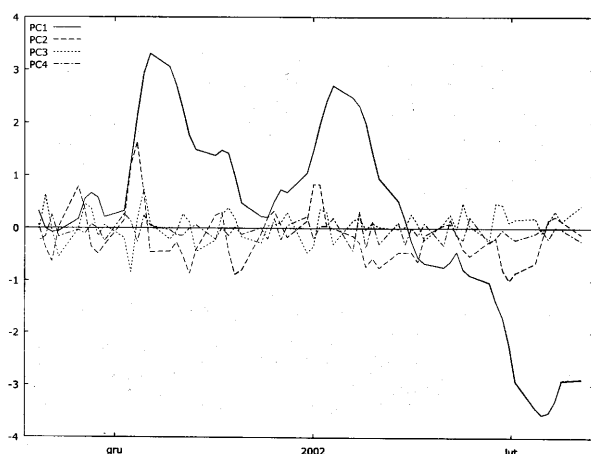
Komentarz: Ostatni model (Tabl. 8.6), estymowany procedurą ARMA(a,4,4), jest stacjonarny (wszystkie moduły pierwiastków charakterystycznych części AR brane z dokładnością > do 0,01 są większe od 1,00). Na poziomie ufności 99% istotny jest wyraz wolny oraz 2 i 4 opóźnienie zmiennej objaśnianej. Wygenerowany trend zmierza do **stabilnego punktu stałego** (ilustracja 8.13). Widoczne na wykresie zafalowanie wynika ze "schodkowego" zmierzania do atraktora (patrz np. [4, str. 20 rys. 5.1 - S1]).

Nie mniej na ostatnich marcowych sesjach mógł zaistnieć górny **punkt zwrotny**. W przypadku hipotecznego oszacowania trendu np. z przewidywań ekspertów i wykorzystania go w modelu ARMA(0,1,0,f(t)) uzyskano by szereg trendostacjonarny. Tymczasem procedura ARMA sama to zrobiła (dziwne ?). (Przypis końcowy ⁱⁱ).

8.2 Zastosowanie teorii szeregów ortogonalnych.

Generując trzy opóźnienia: NQ_{t-1} , NQ_{t-2} i NQ_{t-3} , przedstawionego na ilustracji 8.1 szeregu czasowego, rozłożymy go na cztery¹⁶ względem siebie ortogonalne (niezależne liniowo) składowe: PC1, PC2, PC3 i PC4. Uzyskany rezultat (z wykorzystaniem pakietu GRETL i techniki głównych składowych) pokazano na ilustracji 8.14. Z kolei w Tabl. 8.6 przytoczono przekształcenie odwrotne.

16 Liczba 4 została wybrana w kolejnych próbach jako najbardziej optymalna.



Ilustracja 8.14: Rozkład szeregu NQ na 4 składowe ortogonalne.

Model 5: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 60 obserwacji 01/11/20-02/02/11
Zmienna zależna: NQ

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	1604,58	0,000000		niezdefiniowana
PC1	33,5585	0,000000		niezdefiniowana
PC2	42,9435	0,000000		niezdefiniowana
PC3	-35,7518	0,000000		niezdefiniowana
PC4	21,4730	0,000000		niezdefiniowana

Średnia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1604,5
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 70,3045
Suma kwadratów reszt = 0
Błąd standardowy reszt = 0
Wsp. determinacji R-kwadrat = 1
Skorygowany wsp. R-kwadrat = 1
Statystyka F (4, 55) niezdefiniowana

Tabl. 8.7:

$$prNQ = 1605 + 34 PC1 + 43 PC2 - 36 PC3 + 21 PC4$$

Tabl. 8.8 zawiera wektory własne tego rozkładu (kolumny macierzy $a_{ij}, i, j = 1, \dots, 4$ wzór 5.2), a Tabl. 8.9 korelacje wzajemne szeregu wyjściowego NQ i szeregów syntetycznych (głównych składowych PC1, ..., PC4).

Macierz korelacji wartości własnych

Czynnik	Wartość własna	Udział	Skumulowany udział w wariancji
1	3,5712	0,8928	0,8928
2	0,2983	0,0746	0,9674
3	0,0949	0,0237	0,9911
4	0,0357	0,0089	1,0000

Wektory wartości własnych (ładunki składowej)

Zmienna	PC1	PC2	PC3	PC4
NQ	0,489	0,626	-0,521	0,313
NQ_1	0,512	0,311	0,460	-0,656
NQ_2	0,512	-0,284	0,515	0,626
NQ_3	0,486	-0,657	-0,502	-0,283

Tabl. 8.8

Współczynniki korelacji, wykorzystane obserwacje 01/11/15 - 02/03/15
(obserwacje z brakującymi danymi będą pominięte)

Wartość krytyczna (przy dwustronnym 5% obszarze krytycznym) = 0,2542 dla n = 60

NQ	PC1	PC2	PC3	PC4	NQ
1,0000	0,9295	0,4942	-0,3081	0,2360	
	1,0000	0,1794	-0,1353	0,1695	PC1
		1,0000	-0,1272	0,0803	PC2
			1,0000	-0,0897	PC3
				1,0000	PC4

Tabl. 8.9

Na ilustracji 8.14 zwraca uwagę podobieństwo otrzymanego rozkładu sumarycznego z rozkładem szeregu na składowe harmoniczne. Główna składowa PC1 jest odzwierciedleniem wygładzonego szeregu wyjściowego NQ (patrz ilustracja 8.1) a pozostałe trzy "szumami". Zatem zastosowana procedura jest pewnym filtrem liniowym¹⁷.

W dalszym ciągu ustalimy arbitralnie horyzont prognozy na 100 dni sesyjnych (z krokiem czasowym Δt = dzień sesyjny). Prognoza dynamiczna dla szeregów ortogonalnych PC1, ..., PC4 estymowana będzie procedurą ARMA(a,k,k) metodą punktową (bez określania przedziałów ufności).

Zastosujemy taktykę:

Minimalizacji rzędu opóźnień k w procedurze ARMA(a,k,k), przy jednoczesnym doprowadzaniu procesu resztowego do białego szumu (przy poziomie ufności 95%).

Ostateczna prognoza dla zmiennej NQ zostanie obliczona z równania podanego w Tabl. 8.7 po zastąpieniu w nim zmiennych objaśniających ich prognozami dynamicznymi. Szereg ten nie posiada atraktora (równanie 7.4 nie ma miejsc zerowych).

¹⁷ Jest to również unaocznienie tezy postawionej przy okazji wprowadzenia wzorów 4.1 i 4.2, że największa ilość informacji zawarta jest w pierwszej głównej składowej a najmniejsza w ostatniej (str.5, wiersz 1 i 2).

Uzyskane rezultaty przytoczono w Tabl. 8.10 do 8.13 i pokazano na ilustracjach 8.15 do 8.18 na następnych stronach.

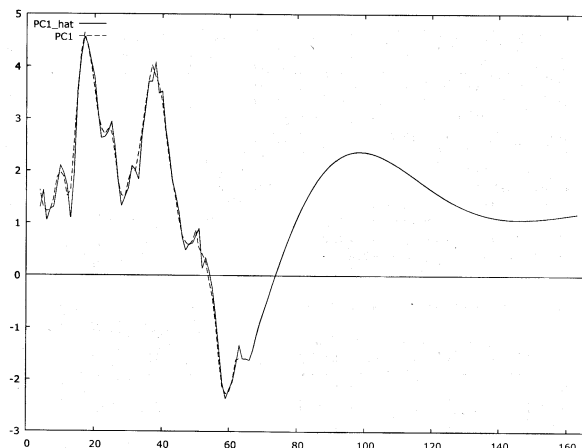
Estymacja ARMA z wykorzystaniem 60 obserwacji 01/11/20-02/02/11
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC1

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	1,30207	0,641268	2,030	0,04231 **
phi_1	2,30152	0,223611	10,293	<0,00001 ***
phi_2	-1,97843	0,607341	-3,258	0,00112 ***
phi_3	0,979371	0,593886	1,649	0,09913 *
phi_4	-0,307421	0,211181	-1,456	0,14547
theta_1	-0,281703	0,189960	-1,483	0,13808
theta_2	0,209775	0,180844	1,160	0,24606
theta_3	-0,120683	0,136657	-0,883	0,37718
theta_4	-0,807376	0,148447	-5,439	<0,00001 ***

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = 1,60352
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 1,77795
średnia z zaburzeń losowych = 0,0150921
wariancja z zaburzeń losowych = 0,0317544
Logarytm wiarygodności = 12,057038
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -4,11408
Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 16,8294
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 4,07806

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	1,0303	-0,0678	1,0326	-0,0105
Pierwiastek 2	2	1,0303	0,0678	1,0326	0,0105
Pierwiastek 3	3	0,5626	-1,6536	1,7467	-0,1978
Pierwiastek 4	4	0,5626	1,6536	1,7467	0,1978
MA					

Tabl. 8.10



Ilustracja 8.15: PC1_hat prognoza z Tabl. 8.9.

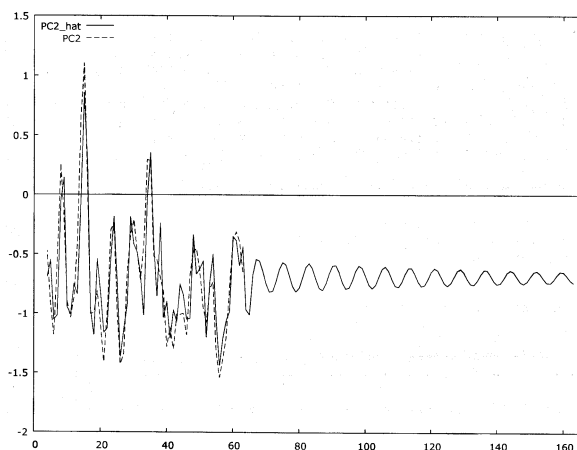
Estymacja ARMA z wykorzystaniem 60 obserwacji 01/11/20-02/02/11
Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
Zmienna zależna: PC2

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,690137	0,100067	-6,897	<0,00001 ***
phi_1	1,46640	0,159544	9,191	<0,00001 ***
phi_2	-1,25304	0,278149	-4,505	<0,00001 ***
phi_3	0,271608	0,282866	0,960	0,33696
phi_4	-0,112504	0,160807	-0,700	0,48417
theta_1	0,0224406	0,115186	0,195	0,84553
theta_2	-0,0439588	0,132959	-0,331	0,74093
theta_3	0,119099	0,136702	0,871	0,38363
theta_4	0,930663	0,118653	7,844	<0,00001 ***

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,686434
Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,525355
średnia z zaburzeń losowych = 0,000487246
wariancja z zaburzeń losowych = 0,0588904
Logarytm wiarygodności = -3,7076072
Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = 27,4152
Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 48,3587
Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 35,6073

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	0,6892	-0,7404	1,0115	-0,1307
Pierwiastek 2	2	0,6892	0,7404	1,0115	0,1307
Pierwiastek 3	3	0,5179	-2,9015	2,9473	-0,2219
Pierwiastek 4	4	0,5179	2,9015	2,9473	0,2219
MA					

Tabl. 8.11



Ilustracja 8.16: Model z Tabl. 8.10.

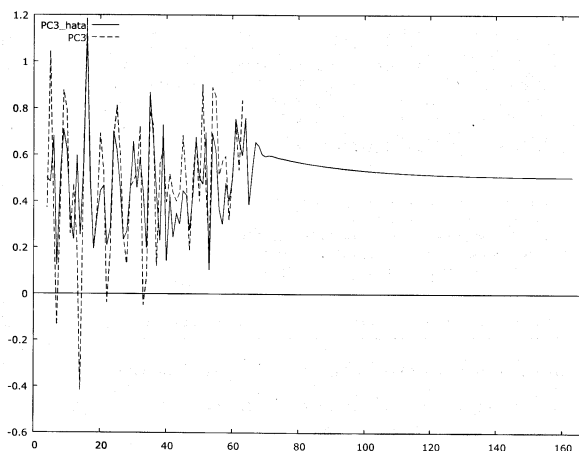
Estymacja ARMA z wykorzystaniem 60 obserwacji 01/11/20-02/02/11
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PC3

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	0,501547	0,0616836	8,131	<0,00001 ***
phi_1	1,17530	0,194063	7,629	<0,00001 ***
phi_2	-0,451391	0,255306	-1,768	0,07705 *
phi_3	0,237056	0,157523	1,505	0,13235
theta_1	-1,05627	0,151992	-6,949	<0,00001 ***
theta_2	-0,687651	0,244167	-2,816	0,00486 ***
theta_3	0,874212	0,147393	5,931	<0,00001 ***

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = 0,484932
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,293114
 średnia z zaburzeń losowych = 0,0160846
 wariancja z zaburzeń losowych = 0,037281
 Logarytm wiarygodności = 9,6545346
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -3,30907
 Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = 13,4457
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = 3,24464

	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	1,0393	0,0000	1,0393	0,0000
Pierwiastek 2	2	0,4324	-1,9678	2,0147	-0,2156
Pierwiastek 3	3	0,4324	1,9678	2,0147	0,2156

Tabl. 8.12



Ilustracja 8.16: Model z Tabl. 8.11.

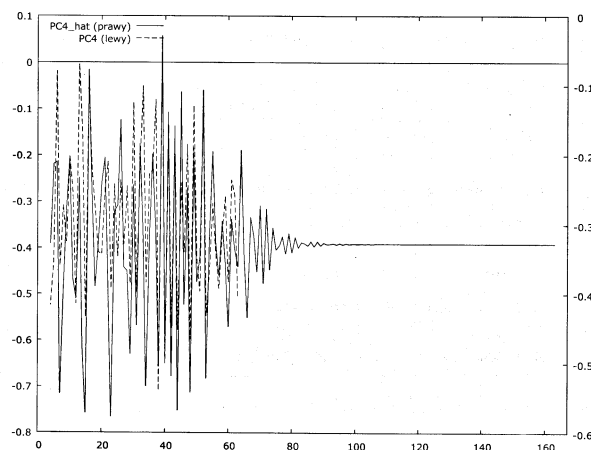
Estymacja ARMA z wykorzystaniem 60 obserwacji 01/11/20-02/02/11
 Estymacja z wykorzystaniem filtru Kalmana (właściwa ML)
 Zmienna zależna: PC4

Zmienna	Współczynnik	Błąd stand.	Statystyka t	Wartość p
const	-0,327146	0,0140937	-23,212	<0,00001 ***
phi_1	-1,51071	0,160255	-9,427	<0,00001 ***
phi_2	-0,670307	0,297368	-2,254	0,02419 **
phi_3	-0,0178151	0,287103	-0,062	0,95052
phi_4	-0,0234155	0,155649	-0,150	0,88042
theta_1	0,753621	0,137689	5,473	<0,00001 ***
theta_2	-0,0248047	0,157558	-0,157	0,87490
theta_3	0,582305	0,124726	4,669	<0,00001 ***
theta_4	0,905685	0,113991	7,945	<0,00001 ***

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej = -0,32976
 Odchylenie standardowe zmiennej zależnej = 0,178375
 średnia z zaburzeń losowych = -0,00221857
 wariancja z zaburzeń losowych = 0,0122533
 Logarytm wiarygodności = 43,522053
 Kryterium informacyjne Akaike'a (AIC) = -67,0441
 Kryterium bayesowskie Schwarza (BIC) = -46,1007
 Kryterium infor. Hannana-Quinna (HQC) = -58,852

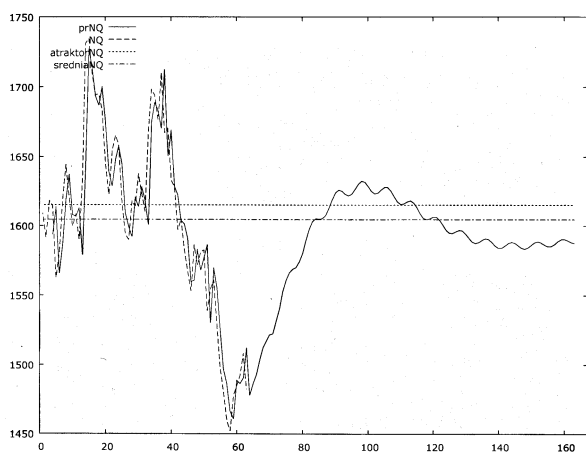
	część	Rzeczywista	Urojona	Moduł	Częstość
AR					
Pierwiastek 1	1	-1,0958	-0,4539	1,1861	-0,4375
Pierwiastek 2	2	-1,0958	0,4539	1,1861	0,4375
Pierwiastek 3	3	0,7154	-5,4630	5,5096	-0,2293
Pierwiastek 4	4	0,7154	5,4630	5,5096	0,2293

Tabl. 8.13

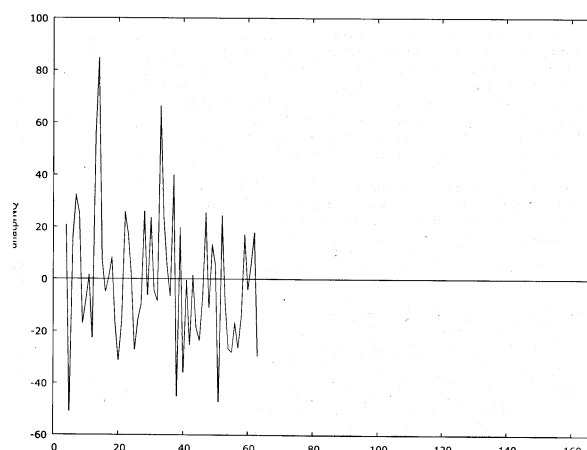


Ilustracja 8.18: Model z Tabl. 8.12.

Ostateczną prognozę dla horyzontu czasowego 100 dni sesyjnych, uzyskaną z modelu statycznego z Tabl. 8.7, pokazuje Ilustracja 8.19. Reszty tego modelu są już białym szumem (Ilustracja 8.20). Przedziały ufności dla maksymalnych przewidywanych wartości zmiennej NQ przytoczono w Tabl. 8.14. Model przewiduje wystąpienie górnego punktu zwrotnego, o wartości indeksu NASDAQ równego 1632.28 w dniu 1.04.2002.



Ilustracja 8.19: Prognoza dynamiczna zmiennej NQ na 100 kroków na przód. Atraktor $NQ=1615,17$ (patrz wzór 8.1a).



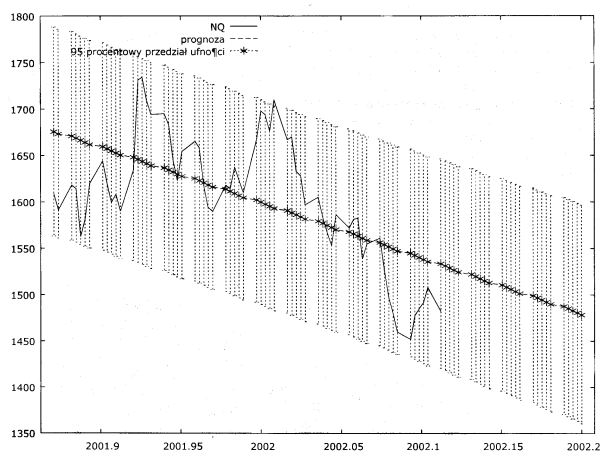
Ilustracja 8.20: Reszty modelu z Ilustracji 8.18 będące gusowskim białym szumem.

Dla 95% przedziału ufności, $z(.025) = 1,96$

Obs	NQ	prognoza	błąd ex ante	95% przedział ufności
02/02/06	1484,97	1488,93		
02/02/07	1492,27	1486,30		
02/02/08	1508,25	1490,41		
02/02/11	1482,57	1511,98		
02/02/12		1478,06	26,166	1426,78 - 1529,35
02/02/13		1486,43	26,166	1435,15 - 1537,72
02/02/14		1492,91	26,166	1441,63 - 1544,20
02/04/01		1632,38	26,166	1581,09 - 1683,66
02/04/02		1631,63	26,166	1580,34 - 1682,91
02/04/03		1628,59	26,166	1577,30 - 1679,87
02/04/04		1625,15	26,166	1573,86 - 1676,43
02/04/05		1623,30	26,166	1572,02 - 1674,59
02/04/08		1623,86	26,166	1572,57 - 1675,14
02/04/09		1626,05	26,166	1574,77 - 1677,33
02/04/10		1627,95	26,166	1576,67 - 1679,24

Tabl. 8.14

Komentarz: Szereg zmierza do atraktora czyli swojego stabilnego punktu stałego. Następnie do asymptoty $NQ \rightarrow 1587$ leżącej poniżej jego wartości średniej. Jest to zgodne z ogólną tendencją otrzymaną np. z aproksymacji liniowej: $NQ^t = 1677,97 - 2,293 t$ wskazującą na spadek indeksu w analizowanym interwale czasowym (Ilustracja 8.21).



Ilustracja 8.21: Ogólna tendencja indeksu NASDAQ w analizowanym interwale czasowym.

9. Podsumowanie.

Krótkie wnioski:

1. W przypadku dobrze wybranych szeregów czasowych, będących np. modelem zredukowanym modelu strukturalnego (wynikającego z teorii ekonomicznej. DOBREJ !), ich rozkład na szeregi ortogonalne (główne składowe, szeregi syntetyczne) wydaje się rozwiązaniem przyszłościowym.
2. Predykcja autoregresyjna modelem $ARMAX(a, k, f(t))$, gdzie: a - wyraz wolny, $k=0, 1 \dots 4$ - rząd opóźnień części AR i MA , $f(t)$ - trend czasowy szeregu, jest celowa (skuteczna) jedynie wtedy gdy generowany przez model szereg czasowy jest trendostacjonarny.
Nie liniowa funkcja $f(t)$ - trend - może być np. przewidziana przez ekspertów (być może nawet mgliscie ?) na podstawie poza modelowej wiedzy o możliwej ścieżce rozwoju danego parametru (zespołu parametrów) ekonomicznych lub gospodarczych.
3. W przypadku rozkładu zespołu szeregów czasowych (ekonomiczno-gospodarczych), o takim samym kroku Δt i liczebności n ¹⁸, na główne składowe (szeregi ortogonalne) granicę trendu można w niektórych przypadkach oszacować z kwadratowego sprzężenia zwrotnego (predykcji na podstawie kwadratowej funkcji pierwszego opóźnienia zmiennej objaśnianej) i utrwalonych już osiągnięć teorii chaosu deterministycznego.
4. Dla szeregów giełdowych (indeksów, cen akcji) będących procesami błędzenia przypadkowego (tak uważa większość ekspertów bo przyrost cen akcji jest procesem czysto losowym¹⁹. Podobno ?), na podstawie kwadratowego sprzężenia zwrotnego²⁰ można określić górną lub dolną granicę zbieżności trendu (atraktor). W tych przypadkach znajomość stabilnego punktu stałego może posłużyć do spekulacji.²¹
5. Rozkład giełdowego szeregu czasowego i jego opóźnień na szeregi ortogonalne może prowadzić do uzyskania składowych addytywnych z których przynajmniej niektóre będą realizacjami procesów stacjonarnych. Pozwala to na wiarygodne zastosowanie modeli predykcji dynamicznej typu $ARMA(a, k, k)$ i przewidzenie najbliższego punktu zwrotnego w stabilnej sytuacji ekonomiczno-gospodarczej (brak paniki giełdowej).

18 Warunek nie konieczny. Pakiet programowy GRETL wybiera szereg najkrótszy i dostosowuje do niego pozostałe szeregi opuszczając dane go poprzedzające i wyprzedzające.

19 Gdyby szeregi giełdowe były procesami stacjonarnymi utrzymywałyby się na tym samym poziomie, ewentualnie miały stały trend. Tak jednak nie jest. Mantegna R.N. i Stanley H.E. (nobliści z ekonomii) w *EKONOFIZYCE* (PWN, 2001) stwierdzili, że szeregi notowań giełdowych mają rozkłady Levy'ego, o nieskończonej wariancji a co za tym idzie są **niestacjonarne**.

20 Estymacja równania 6.1 (str. 6) zawsze jest jednoznaczna a co za tym idzie pierwiastki równania kwadratowego też.

21 Zakładając hipotetycznie, że ilustracja 8.10 przedstawia zmianę ceny akcji jakiegoś koncernu (przedsiębiorstwa) można grać na wyżkę (kupujemy i na najbliższych sesjach sprzedajemy) aż do ceny określonej przez górny atraktor NQ1 (nieco poniżej tej ceny).

10. Cytowana bibliografia.

1. Bronsztejn I.N, Siemiediajew. *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. PWN 1996.
2. Cottrel A. *Gretl User's Guide. Gnu Regression, Econometrics and Time-series, July, 2006*.
Internet: www.kufel.torun.pl
3. Kasprzycki A. *Prognozowane notowań pakietów akcji poprzez ortogonalizację szeregów czasowych. Październik 2005*. Zeszyty Naukowe WSDG, nr 15. Internet: akasprzycki.republika.pl
4. Kasprzycki A. *Badanie stabilności rynku kredytów bankowych. Listopad 2007*. Internet: www.uczelniawarszawska.pl > Studenci > Materiały udostępnione przez wykładowców > Ekonomia.
5. Kasprzycki A. *Prognoza inflacji i innych wskaźników ekonomiczno-finansowych na 2008/09*.
Internet: www.uczelniawarszawska.pl > (jak wyżej).
6. Kośko M., Osińska M., Stempińska J. *Ekonometria współczesna*. Dom Organizatora. Toruń, 2007.
7. Maddala G.S. *Ekonometria*. PWN, 2006.
8. Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*. PWN 2004.

Przypisy końcowe:

- i W bardzo przystępnej książce Iana Stewarda. *CZY BÓG GRA W KOŚCI ? Nowa matematyka chaosu* (PWN<1996), na str. 320 można przeczytać: ***Tak więc chaotyczna dynamika wprowadza całkowicie nowe - i trudne - problemy przy interpretacji i analizie danych doświadczalnych. Lepiej jest jednak mieć jasny i trudny problem niż żyć w raju głupców.***
...DYNAMIKA JEST NIELINIOWA, A NIELINIOWOŚĆ NIE SZANUJE ŚREDNICH.
- ii Estymując kilkakrotnie ten sam szereg czasowy można uzyskać identyczne parametry (Tabl. 8.5) ale całkiem odmienny trend ex ante (Ilustracje 8.6, 8.7 i 8.10). Wynika to z jednej z właściwości chaosu deterministycznego, mianowicie ***wrażliwości na warunki początkowe***.
W części 2 w monografii H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe. *GRANICE CHAOSU FRAKTALE* (PWN 2002) na stronie 140 (10.1 Oznaki chaosu *wrażliwość*) czytamy: ***Największym problemem, jaki napotykają komputery podczas programów związanych z chaosem, jest nadzwyczajna wrażliwość iteracji. Może to prowadzić do pojawienia się nieoczekiwanych zjawisk numerycznych, więc musimy być bardzo ostrożni przy interpretowaniu wyników podawanych przez komputer.***