Prognozowanie notowań pakietów akcji poprzez ortogonalizację szeregów czasowych[1]

Andrzej Kasprzycki

1. Wstęp

Dynamikę rynku finansowego opisuje się indeksami agregatowymi: cen, ilości i wartości.

Indeks giełdowy np. *Down Jones Industrial* kompiluje 30 akcji. Inny, na przykład dochodowy WIG, uwzględniający dywidendy, szacowany jest na podstawie notowań 99% wszystkich uczestniczących na giełdzie spółek ([4] str. 388).

Prognozy ilościowe (np. robione przy użyciu przedziałów ufności) uwzględniają: funkcję trendu – najczęściej liniową – badanie losowości rozkładu reszt i autokorelacji składnika losowego (zwykle addytywnego).

Trend jest ekstrapolowany (liniowo, rzadziej inną funkcją ciągłą), odejmowany od szeregu czasowego indeksu giełdowego, a pozostała reszta traktowana jak stacjonarny proces stochastyczny [5], często sprowadzany do tzw. **białego szumu**:

1.1. $[Y - f(t)] \in N[O, \sigma]$

gdzie $f(t)$ – funkcja trendu określona na przedziale czasowym (dyskretnym),

1.2. $t \in [t_1 \ldots t_n \ldots \mathrm{t}_{n+k}]$

gdzie: $t_1 - t_{n-1}$ – czas przeszły, t_n – chwila obecna, k – wyprzedzenie prognozy.
$N[O, \sigma]$ – rozkład normalny o wartości oczekiwanej O i wariancji σ niezależnej od czasu. $Y = Y(t)$ – szereg czasowy indeksu giełdowego.

Niezależna zmienna czasowa t zwykle zmienia się co jeden dzień.

Najczęściej jednak prognozy ilościowe indeksów giełdowych wykorzystują autokorelacje szeregu czasowego i budowane są w oparciu o modele wygładzania wykładniczego.

W wielu przypadkach dają one zadowalające wyniki (na przyjętym poziomie ufności) np. [6].

W niektórych jednak stanowią niepotrzebne obciążenie, sprowadzające rzecz do prognozy naiwnej typu: **jutro będzie to samo co dzisiaj** (np. [3]; str. 136, przykład 3.7.2).

W wyżej przytoczonym przykładzie współczynnik $\alpha = 0{,}6$, w prostej metodzie Browna, jest źle dobrany (metodami Montecarlo?)

Minimum funkcji błędu:

1.3. $$S(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[y_t - y_t^{\forall}(\alpha)]^2}$$

1 Praca opublikowana w Zeszytach Naukowych Wyższej Szkoły Działalności Gospodarczej w Warszawie. Nr 15, 2005.

$\alpha \in [0, 1]$. Znakiem $\forall$ oznaczono wartość prognozowaną.
osiągane jest na granicy przedziału, dla wartości $\alpha = 1$.
Sprowadza to prognozę do modelu:

1.4. $y_{t+1}^{\forall} = y_t$

W tym przypadku model wygładzania wykładniczego z jednym parametrem w ogóle nie powinien być stosowany.

Najlepsze rezultaty prognostyczne otrzymuje się modelami autoregresyjnymi typu ARMA i ARIMA ([2], [6]), które uwzględniają – na złożonym poziomie ufności – ciąg opóźnień zmiennej losowej, w omawianym przypadku **indeksu giełdowego**.

Nasuwa się pytanie, czy modeli tych – dobrze opracowanych ekonometrycznie i znajdujących się w standardowych pakietach programowych – nie można by wykorzystać jeszcze efektywniej?

Wydaje się, że tak jak kiedyś zrobiono to ze światłem białym, rozkładając je na widmo spektralne, można by coś podobnego zrobić z notowaniami pakietu akcji (a nawet wszystkimi akcjami np. 99%), na wybranym rynku finansowym.

Niniejsza praca jest próbą takiego właśnie podejścia.

Wykorzystuje szeregi czasowe notowań poszczególnych akcji (np. wiodących), skorelowane ze sobą, siłą rzeczy, działania jednego rynku finansowego.

Szeregi te są przekształcane na szeregi ortogonalne tzn. niezależne od siebie (nieskorelowane).

Do każdego z tych syntetycznych szeregów, których może być stosunkowo niewiele (np. 3, 4, … *k*), można zastosować modele ARMA i ARIMA, albo nawet prostsze – wygładzania wykładniczego – a potem znowu przejść na zwykłe notowania giełdowe akcji poszczególnych firm.

W dalszej części przedstawiony zostanie model matematyczny takiej operacji, oparty na prostej algebrze liniowej uwzględniający wartości własne macierzy kwadratowych. (Niestety, nie uwzględnia tego program nauczania matematyki na kierunkach ekonomicznych).

Studenci ostatnich lat ekonometrii nie powinni mieć trudności ze zrozumieniem modelu.

2. Szczegółowy model matematyczny

Historyczne (przeszłe) notowania wybranego pakietu akcji (np. w zł) zestawiamy w postaci tablicy tworzącej prostokątną macierz o *n* kolumnach (zmienna czasowa) i *k* wierszach (zmienna indeksująca spółki giełdowe). Macierz tą oznaczamy jak następuje

2.1. $${}_k\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & & & \\ x_{k1} & x_{k2} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \qquad \text{przy czym } n > k$$

gdzie x_{ij} – cena akcji i-tej firmy w j-tym dniu.

W dalszym ciągu przeprowadzimy standaryzację zmiennych losowych. (Nie jest to jednak konieczne). Przekształcamy zmienną losową x w nową zmienną y według wzoru

2.2. $$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{S_i} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2 \dots k \\ j = 1, 2 \dots n \end{matrix}$$

gdzie: $\bar{x}_i$ – wartość średnia szeregu czasowego (j = 1, 2, … n) dla i-tej zmiennej; S_i – pierwiastek ze średniego kwadratowego odchylenia dla tej samej zmiennej.

Symbolicznie:

$${}_k\mathbf{X}_n \rightarrow {}_k\mathbf{Y}_n$$

Dalej mamy:

2.3. $${}_k\mathbf{Y}_n\mathbf{Y}_k^T = {}_k\mathbf{K}_k = [\rho_{i\,l}]$$

gdzie ${}_k\mathbf{K}_k$ jest kwadratową i symetryczną macierzą korelacji zmiennych y_i, ρ_{il} – współczynnikiem korelacji pomiędzy zmiennymi y_i i y_l (i, l = 1, 2 … k). Symbolem T oznaczono transpozycję macierzy.

Jest oczywiście:

$$\rho_{ii} = 1; \qquad \rho_{il} = \rho_{li}$$

Własności funkcji własnych pozwalają na utworzenie następującego równania macierzowego (np. [1] str. 416).

2.4a. $${}_k\mathbf{K}_k = {}_k\mathbf{R}_k\,\boldsymbol{\lambda}_k\,\mathbf{R}_k^{-1}$$

lub

2.4b. $${}_k\mathbf{R}_k^{-1}\,\mathbf{K}_k\,\mathbf{R}_k = {}_k\boldsymbol{\lambda}_k$$

Wykładnikiem –1 oznaczono macierz odwrotną do danej macierzy kwadratowej, gdzie: ${}_k\mathbf{R}_k$ – macierz wektorów własnych; ${}_k\boldsymbol{\lambda}_k$ – diagonalna macierz wartości własnych macierzy kwadratowej ${}_k\mathbf{K}_k$.

Określimy teraz nowe szeregi czasowe posługując się operacją:

2.5. $${}_k\mathbf{T}_n = {}_k\mathbf{A}_k\mathbf{Y}_n$$

gdzie ${}_k\mathbf{A}_k$ jest pewną macierzą (operatorem) przekształcenia, chwilową nieznaną.

Dla macierzy kwadratowej i symetrycznej – jaką jest np. macierz współczynników korelacji – wektory własne są ortogonalne tzn. spełnione jest równanie:

2.6. $${}_k\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k^T = {}_k\mathbf{I}_k \text{ lub } {}_k\mathbf{R}_k^T\mathbf{R}_k = {}_k\mathbf{I}_k$$

gdzie: ${}_k\mathbf{I}_k$ jest diagonalną macierzą jednostkową.
Wynika to natychmiast ze wzoru 2.4b. jest bowiem:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$$

i dalej

$$(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}\,\mathbf{R})^T = \lambda \Rightarrow \mathbf{R}^T(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K})^T = \lambda \Rightarrow \mathbf{R}^T\mathbf{K}(\mathbf{R}^{-1})^T = \lambda$$

a stąd

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

co jest warunkiem ortogonalności.

Dalej doprowadzimy do sytuacji, w której szeregi czasowe ${}_k\mathbf{T}_n$ byłyby niezależne liniowo (nieskorelowane) czyli aby spełniona była zależność:

2.7. $${}_k\mathbf{T}_n\,\mathbf{T}_k^T = {}_k\mathbf{I}_k$$

W dalszym ciągu do równania 2.7 wstawiamy zależność 2.5, biorąc również pod uwagę, że:

$${}_n\mathbf{T}_k^T = {}_n\mathbf{Y}_k^T\mathbf{A}_k^T$$ (transpozycja prawej strony zależności 2.5)

Otrzymuje się:

2.8. $${}_k\mathbf{A}_k\,\mathbf{Y}_n\,\mathbf{Y}_k^T\mathbf{A}_k^T = {}_k\mathbf{I}_k$$

Korzystając dalej ze wzorów 2.3. i 2.4 z równania 2.8 otrzymuje się:

2.9. $${}_k\mathbf{A}_k\,\mathbf{R}_k\,\boldsymbol{\lambda}_k\,\mathbf{R}_k^{-1}\,\mathbf{A}_k^T = {}_k\mathbf{I}_k$$

Jeżeli za niewiadomą macierz ${}_k\mathbf{A}_k$ (operator przekształcenia) przyjmiemy:

2.10. $${}_k\mathbf{A}_k = {}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{R}_k^T$$

gdzie ${}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}}$ jest diagonalną macierzą odwrotności pierwiastków z wartości własnych λ_i; $i = 1, 2 \dots k$

Jest również:

2.11. $${}_k\mathbf{A}_k^T = {}_k\mathbf{R}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}}$$ (transpozycja prawej strony zależności 2.10)

bo dla macierzy diagonalnych mamy:

$${}_k(\boldsymbol{\lambda}^{-\frac{1}{2}})_k^T = {}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}}$$

Ostatecznie po podstawieniu do równania 2.9 zależności 2.10 i 2.11, otrzymuje się:

2.12. $${}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{R}_k^T\,\mathbf{R}_k\,\boldsymbol{\lambda}_k\,\mathbf{R}_k^{-1}\mathbf{R}_k\boldsymbol{\lambda}_k^{-\frac{1}{2}} = {}_k\mathbf{I}_k$$

oraz dalej (po wykonaniu działań na lewej stronie 2.12, z uwzględnieniem 2.6)

$${}_k\mathbf{I}_k = {}_k\mathbf{I}_k$$

co dowodzi, że macierz określona wzorem ogólnym 2.10 jest rozwiązaniem równania 2.8.
Równanie 2.5 może być również rozwiązane względem ${}_k\mathbf{Y}_n$

2.13. $${}_k\mathbf{Y}_n = {}_k\mathbf{A}_k^{-1}\,\mathbf{T}_n$$

Aby znaleźć elementy macierzy ${}_k\mathbf{A}_k$ zauważymy, że równanie 2.4b można przekształcić następująco:

2.14. $${}_k\mathbf{K}_k\mathbf{R}_k - {}_k\mathbf{R}_k\,\boldsymbol{\lambda}_k = 0$$ (mnożąc prawostronnie przez ${}_k\mathbf{R}_k$)

co prowadzi do układu równań jednorodnych pierwszego stopnia względem współczynników r_{jk}:

2.15. $$\sum_{j=1}^{k}(k_{ij} - \lambda_k\,\delta_{ij})r_{jk} = 0$$

gdzie δ_{ij} – funkcja Kronekera (δ_{ij} = 1 dla $i = j$ δ_{ij} = 0 dla $i \neq j$); ij = 1, 2 … k pozwalających na obliczenie współczynników r_{jk} zależnych od k stałych parametrów.
Parametry te można obliczyć z warunku ortogonalności

2.16. $${}_k\mathbf{R}_k^T\,\mathbf{R}_k = {}_k\mathbf{I}_k$$

Jest to układ równań 2-go stopnia względem współczynników r_{jk} i do dalszych obliczeń można wykorzystać jedynie przekątną główną.

3. Ograniczenie modelu

Jak wynika z toku rozumowania przytoczonego w rozdziale 2, konieczne jest spełnienie następujących warunków:

3.1. Wielomian charakterystyczny macierzy korelacji powinien posiadać k różnych pierwiastków, stanowiących zbiór wartości własnych:

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$

3.2. Wszystkie wartości własne muszą być dodatnie, co bezpośrednio wynika ze wzoru 2.10, rozdziału 2.

Być może metodę tę można będzie zastosować w dziedzinie liczb zespolonych, bo przekształcenie odwrotne (wzór 2.13 rozdział 2) zapewni powrót do liczb rzeczywistych.

W tym przypadku pozostałoby jedynie 1-sze ograniczenie.

4. Przykład obliczeniowy

Pomijając same szeregi czasowe, jako rzecz szeroko omówioną w najnowszej literaturze przedmiotu (np. [2], [4], [6]), przyjmiemy dla $k = 3$ następującą macierz korelacji:

4.1. $${}_3\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}7 & 1 \end{bmatrix}$$

z wielomianu charakterystycznego

4.2. $$(1-\lambda)^3 - 0{,}83(1-\lambda) + 0{,}21 = 0$$

Otrzymuje się następujące wartości własne.

4.3. $\lambda_1 = 0{,}261264$□ $\lambda_2 = 0{,}720753$□ $\lambda_3 = 2{,}017983$

są zatem spełnione warunki 3.1 i 3.2 z rozdziału 3.

Macierz wektorów własnych oznaczmy jak następuje

4.4. $${}_3\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu 9-ciu równań jednorodnych 2.15, po eliminacji trzech równań jako liniowo zależnych, daje wartości tej macierzy:

4.5. $${}_3\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} -0{,}4341\cdot\alpha & 1{,}54764\beta & -1{,}09246\gamma \\ 1{,}24138\alpha & -0{,}26435\beta & -1{,}097036\gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}$$

Elementy tej macierzy zależą od trzech dowolnych parametrów: α; β i γ.

Z trzech równań dla przekątnej głównej – z zależności 2.16 – otrzymuje się jednak:

4.6.
$$\alpha = \pm 0{,}605296$$
$$\beta = \pm 0{,}537209$$
$$\gamma = \pm 0{,}542569$$

Sprawdzamy jeszcze równanie dla elementu i_{12} (2.16), który powinien być równy zero:

4.7. $$\alpha\beta(-0{,}4341 \cdot 1{,}54764 - 1{,}24138 \cdot 0{,}26435 + 1) = 2{,}84 \cdot 10^{-6}$$

Zatem postulat ten jest spełniony z dokładnością do 5-go rzędu.

Ostatecznie z zależności 2.10 macierz (operator) przekształcenia trzech szeregów czasowych w szeregi liniowo niezależne przedstawia się następująco:

4.8.
$$_3\mathbf{A}_3 = {}_3\boldsymbol{\lambda}_3^{-\frac{1}{2}}\,\mathbf{R}_3^T = \begin{bmatrix} 0{,}262759 & -0{,}831406 & 0{,}592735 \\ -0{,}751402 & 0{,}142011 & 0{,}595218 \\ 0{,}605296 & 0{,}537209 & 0{,}542569 \end{bmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{bmatrix} 1{,}956412 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}177896 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}703949 \end{bmatrix}$$

Macierz (operator) przekształcenia odwrotnego – wzór 2.13 – określa wzór:

4.9. $$_3\mathbf{A}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}146425 & -0{,}543356 & 0{,}436114 \\ -0{,}711381 & 0{,}270477 & 0{,}480434 \\ 0{,}546585 & 1{,}304242 & 0{,}590293 \end{bmatrix}$$

5. Uwagi końcowe

Przy dzisiejszym rozwoju technik obliczeniowych, przedstawiony wyżej model, nawet dla dużej liczby akcji i długich szeregów czasowych, nie przedstawia większych problemów rachunkowych.

Wykorzystuje on informacje „historyczne” jakie zawierają powiązania pomiędzy spółkami emitującymi akcje na tej samej giełdzie.

Można go również potraktować jako dekompozycję k-wymiarowego szeregu czasowego na składowe syntetyczne.

Czy przedstawiona metoda wnosi coś nowego, pomocnego przy prognozowaniu notowań akcji?

O tym można się będzie przekonać po przeprowadzeniu obliczeń na kilkunastu przebiegach rzeczywistych. Jest to oczywiście zadanie wymagające zaangażowania pewnych środków, np. z K.B.N.

Wzory 2.5 i w konsekwencji 2.13 mogą zostać ograniczone do kilku np. 5–6 wektorów własnych w około 90% wyjaśniających całkowitą zmienność losową.

Wydaje się również, że możliwe byłoby wykorzystanie tej metody do kontroli notowań akcji spółek podejrzewanych o złamanie przepisów Komisji Papierów Wartościowych.

Literatura

[1] Beckenbach E. F.: *Nowoczesna matematyka dla inżynierów.* Warszawa, PWN 1962.

[2] Kufel T. (redakcja): *Analiza szeregów czasowych na początku XXI wieku*. Toruń, U.M.K. 2002.

[3] Malinowski A., Tarapata Z.: *Prognozowanie i symulacja rozwoju przedsiębiorstw.* Warszawa, Wyższa Szkoła Ekonomiczna 2002.

[4] Paradysz J.: *Statystyka.* Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu. 2005.

[5] Rozanow J.A.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. Warszawa, PWN 1974.

[6] Zelias A.: *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*. Warszawa, PWN 2002.

Autor składa podziękowanie profesorowi Stanisławowi Dembińskiemu z U.M.K. za skonsultowanie pracy i uwagi krytyczne.

P.S.

wrzesień, 2006.

Przedstawiona praca jest adaptacją metody, którą kiedyś autor zastosował w badaniach zanieczyszczenia powietrza atmosferycznego. Metoda ta i jej numeryczne rozwinięcie (na maszynie cyfrowej ODRA) zostało dobrze ocenione przez prof. dr Jamesa L. McElroya z U.S.A.

(zał. 1 ; page 3, rozd. 9; page 5, p-kt 14.5)