

Fizyka dla Informatyków
Wykład 3

KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

Romuald Kotowski

Katedra Zastosowań Informatyki

PJWSTK 2009

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkąta kwadratowego
 - Przyspieszenie

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkąta kwadratowego
 - Przyspieszenie

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkąta kwadratowego
 - Przyspieszenie

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkianu kwadratowego
 - Przyspieszenie

Wstęp

Życie, to ruch. Również to, co nie żyje, jest też w ciągłym ruchu. Wszystko wokół nas i w nas jest w ruchu. Powyższe zdania są bez wątpienia prawdziwe o tyle, o ile cokolwiek może być prawdziwe. Zwróćmy jednak szczególną uwagę na ostatnie zdanie: „Wszystko wokół nas . . .”. Ten antropologiczny punkt widzenia dobrze uwypukla to, co w badaniu ruchu jest najważniejsze: wybór układu odniesienia.

Wstęp

Przystępując do badania ruchu akceptujemy pozornie oczywiste prawdy o istnieniu materii i o istnieniu wielowymiarowej, pustej i bezstrukturalnej przestrzeni^a. Jeśli teraz po prostu umieścimy w niej jakiś obiekt materialny, to szybko stwierdzimy, że nie mamy narzędzi nie tylko do opisu rodzaju ruchu, ale nawet nie potrafimy stwierdzić, czy ruch w ogóle ma miejsce.

^aJest to przedmiot rozważań i pytań filozoficznych, na które nie ma ostatecznej odpowiedzi. My przychylamy się do poglądu, że Świat istnieje obiektywnie.

Wstęp

Tę pustą przestrzeń nazywamy *przestrzenią fizyczną*. Ale czy rzeczywiście nie ma ona żadnej struktury, czy nie potrafimy nic więcej o niej powiedzieć ponadto, że jest pusta? Nie jest tak źle. Pustej przestrzeni fizycznej przypisujemy następujące atrybuty:

- 1 izotropowość – brak wyróżnionego kierunku;
- 2 jednorodność – brak wyróżnionego punktu.

Strukturę przestrzeni można zmienić wprowadzając do niej obiekty materialne. Takim obiektem materialnym jest np. Ziemia. Istnienie Ziemi powoduje, że pewne kierunki zaczynają być wyróżnione. Jeśli chcemy, na przykład, aby trzymany przez nas kamień poleciał do góry lub w bok, to musimy mu nadać prędkość początkową różną od zera. Jeśli natomiast chcemy ten sam kamień skierować do dołu, to nie musimy mu nadawać żadnej prędkości początkowej: kamień sam z siebie spadnie na podłoże.

Wstęp

W pustej przestrzeni kamieniowi *zawsze* we *wszystkich* kierunkach musimy nadawać niezerową prędkość początkową. To właśnie nazywamy izotropią przestrzeni.

Przykładem atrybutu przestrzeni mającej właściwość jednorodności jest czas. Nie ma wyróżnionych chwil^a. Dowlone doświadczenie możemy przeprowadzać w dowolnych momentach: wynik będzie zawsze taki sam, jeśli tylko inne okoliczności w jakich to doświadczenie jest przeprowadzane będą identyczne.

^aTo stwierdzenie nie jest do końca prawdziwe. Porównaj dyskusję na temat Wielkiego Wybuchu w książce M. Hellera *Początek jest wszędzie*

Układ odniesienia

Rozwiązanie problemu istnienia ruchu znajdziemy oczywiście już w starożytnej Grecji, gdzie słynny Arystoteles z Syrakuz (287-212 p.n.e.) powiedział w niezwykle obrazowy sposób: „*Dajcie mi punkt oparcia, a poruszę Ziemię*”^a.

Ten punkt „oparcia” rozważań o ruchu ciał we współczesnej fizyce nazywamy *układem odniesienia*.

Arystoteles czekał, aż ktoś mu ten punkt podparcia da. Niestety, nie doczekał się. My jesteśmy w dużo bardziej komfortowej sytuacji, gdyż możemy skorzystać z jego doświadczenia i wziąć sobie ów „punkt oparcia” sami. Jedyne, czym powinniśmy się kierować w wyborze układu odniesienia, to wygoda.

^aW podręcznikach szkolnych wypowiedź tę cytuje się przy okazji omawiania dźwigni (maszyny prostej), ale można ją interpretować również w sposób bardziej ogólny.

Układ odniesienia

Jeśli możemy wybrać jeden układ odniesienia, to zapewne możemy wybrać również nieskończenie wiele innych takich układów. Pojawia się zatem naturalne pytanie: który z nich jest najlepszy? Odpowiedź jest prosta: żaden. Wszystkie układy odniesienia są równoprawne^a. A jeśli już koniecznie musimy wybrać, to oczywiście najlepszy jest ten układ odniesienia, który właśnie my wybraliśmy i dlatego nazywamy go *absolutnym układem odniesienia*. Od tej pory wszystkie nasze rozważania możemy odnosić do tego absolutnego układu odniesienia (może to być w 2D np. lewy górny róg ekranu monitora naszego komputera).

^aIstnieje, co prawda, grupa wyróżnionych układów odniesienia, zwanych układami inercjalnymi, czyli takimi w których spełnione jest I prawo Newtona, ale o tym powiemy później, przy okazji omawiania sił działających na obiekty materialne.

Układ odniesienia

Zauważmy, że **matematyka i fizyka są połączone nierozzerwalnym węzłem**. Ta ścisła zależność wynika ze sposobu w jaki konstruuje się teorie fizykalne. W każdym razie, by można było mówić nie tylko o jakościowych, ale również o ilościowych cechach danego zjawiska, musimy mieć do dyspozycji pewne miary i sposoby, jak te miary stosować i porównywać ze sobą. Fizyka klasyczna, czyli ta której podstawą są prace **Izaaka Newtona**^a *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, Analysis Per Quantitatum Series Fluxiones, Ac Differentias: Cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis ...*

^aSir Isaac Newton (25 grudnia 1642 r. – 20 marca 1727 r. , wg kalendarza juliańskiego lub 4 stycznia 1643 r. – 31 marca 1727 r. wg kalendarza gregoriańskiego) był angielskim fizykiem, matematykiem, astronomem, filozofem, historykiem, badaczem Biblii i alchemikiem. Jako pierwszy wykazał, że te same prawa rządzą ruchem ciał na Ziemi i w Kosmosie, był zwolennikiem heliocentryzmu. Podał matematyczne uzasadnienie dla praw Keplera i rozszerzył je udowadniając, że orbity (w większości komet) są nie tylko eliptyczne, ale mogą być też innymi krzywymi stożkowymi, czyli hiperboliczne i paraboliczne. Głosił, że światło ma naturę korpuskularną. Był pierwszym, który zdał sobie sprawę, że widmo barw obserwowane podczas padania białego światła na pryzmat jest cechą padającego światła, a nie pryzmatu, jak głosił 400 lat wcześniej Roger Bacon. Sformułował prawo stygnięcia, zasady zachowania pędu oraz momentu pędu, zajmował się pomiarami prędkości dźwięku w powietrzu i ogłosił teorię pochodzenia gwiazd. Sformułował również twierdzenie o dwumianie i był twórcą rachunku wariacyjnego. Jako pierwszy opisał matematycznie zjawisko pływów morskich (1687).

Układ odniesienia

... i **Kartezjusza**^a *Rozprawa o metodzie* (*Discours de la méthode*, 1637) oraz dołączony do *Rozprawy...* traktat *La géométrie* (*Geometria*), korzysta z osiągnięć greckiej geometrii, przekazanych nam przez Euklidesa, Pitagorasa i Talesa.

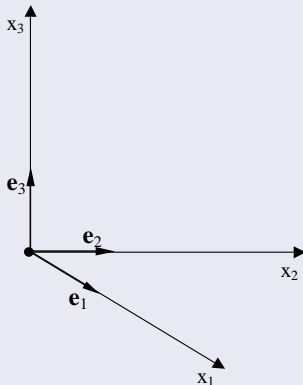
^aKartezjusz (właściwie René Descartes, inaczej Renatus Cartesius), (1596 - 1650), francuski matematyk i filozof, jeden z najwybitniejszych uczonych XVII w., uważany za prekursora nowożytnej kultury umysłowej. Kartezjusz uważał, że geometrii brak ogólnej metody postępowania, a algebra bez właściwego powiązania z geometrią jest trudno zrozumiała intuicyjnie. Traktat *Geometria* zawiera oryginalny pomysł nadania każdemu punktowi na płaszczyźnie nazwy przez przypisanie mu dwóch liczb.

Układy współrzędnych

Przełomowym odkryciem, którego znaczenie dla naszej cywilizacji można porównać tylko z wprowadzeniem do matematyki zera, jest Kartezjuszowska algebraizacja geometrii. Dzięki jego pracy stało się jasne, że do zdefiniowania położenia punktu w n -wymiarowej przestrzeni wystarczy podać n liczb, które interpretujemy jako współrzędne tego punktu w rozważanej przestrzeni. Jednakże aby można było mówić o współrzędnych, musimy w naszym absolutnym układzie odniesienia zdefiniować *układ współrzędnych*. Najbardziej popularnym układem współrzędnych jest *kartezjański układ współrzędnych*, zwany często *prostokątnym układem współrzędnych*. W przestrzeni 3-wymiarowej (3D) tworzą go trzy niezależne liniowo wersory (wektory bazy) \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 i \mathbf{e}_3 (wektory o jednostkowej długości) nawzajem parami do siebie prostopadłe, czyli takie, że ich iloczyn skalarny znika

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Układy współrzędnych



Rys. 1: Kartezjański układ współrzędnych

Układy współrzędnych

Najprostszą realizacją triady wektorów bazy jest umieszczenie ich wzdłuż osi układu współrzędnych. Osie układu współrzędnych w przypadku przestrzeni 3D oznaczamy najczęściej końcowymi literami alfabetu x, y, z , a w przestrzeniach więcej wymiarowych posługujemy się indeksowaniem, oznaczając je np. x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Tak więc np. w przestrzeni Euklidesa 3D wektory bazy mają następujące współrzędne (patrz rys. 1):

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \quad (2)$$

Układy współrzędnych

Niezależność liniowa wektorów: każdy wektor w przestrzeni da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej trzech wektorów bazy, czyli

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i, \quad (3)$$

gdzie liczby a_1, a_2, a_3 są nieznikającymi równocześnie współrzędnymi punktu wskazywanym przez koniec wektora \mathbf{a}^a .

^aMa to oczywiście sens, gdy wektor \mathbf{a} jest wektorem swobodnym, a jego realizacja ma początek w początku układu współrzędnych o współrzędnych $(0, 0, 0)$. Wektor swobodny to klasa równoważności.

Układy współrzędnych

Wzór (3) często zapisujemy symbolicznie

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad (4)$$

podając tylko wartości współczynników występujących w sumie (3).
Jeśli zamiast wektora \mathbf{a} , wybierzemy jeden z wersorów \mathbf{e}_i , to
otrzymamy wzór (2) z nieznikającym tylko jednym współczynnikiem
 $e_i = 1$.

Układy współrzędnych

Wprowadzenie bazy przestrzeni poprzez iloczyn skalarny jest tu bardzo ważne, gdyż pozwala na łatwe uogólnienie bazy przestrzeni wektorowej do każdej innej przestrzeni, np. do przestrzeni funkcyjnej^a.

^aZ potrzebą wprowadzenia takiej bazy spotykamy się chociażby przy okazji implementacji szybkiej transformaty Fouriera (FTT). Mówimy, że funkcje $\varphi_m(x)$, $m = 1, 2, \dots, s$ tworzą bazę przestrzeni funkcyjnej, jeśli ich iloczyn skalarny spełnia następujący warunek:

$$\int \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad m, n = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

Układy współrzędnych

Wektor swobodny, zdefiniowany wzorem (3) (**matematyka!**), staje się wektorem wodzącym punktu M (**fizyka!**), jeśli zamocujemy jego początek w początku układu współrzędnych i wprowadzimy zależność od czasu

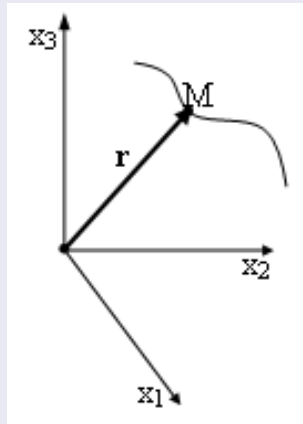
$$M = M(x, y, z, t). \quad (6)$$

Tutaj t nie jest nową współrzędną, ale tylko pewnym parametrem, więc bardziej właściwy jest zapis

$$M = M(x(t), y(t), z(t)). \quad (7)$$

To pozornie mało ważne rozróżnienie ma bardzo istotne znaczenie w teorii względności Einsteina. Na wszelki wypadek będziemy więc dalej stosować notację (7).

Układy współrzędnych



Rys. 2: Wektor wodzący punktu M

Układy współrzędnych

Wielkość $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ nazywamy prędkością punktu M w układzie współrzędnych $0x_1x_2x_3$ i oznaczamy literą \mathbf{v}

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \frac{dx_3(t)}{dt} \right) \\ &= \dot{x}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i,\end{aligned}\tag{8}$$

gdzie '.' nad symbolem zmiennej oznacza jej pochodną czasową. Możemy oczywiście badać również prędkość zmian prędkości. Wielkość tę nazywamy przyspieszeniem i oznaczmy literą \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \mathbf{e}_i.\tag{9}$$

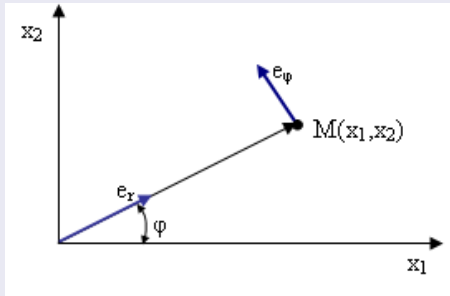
Zauważmy, że różniczkowaniu podlegają tu tylko współrzędne – wektory bazy są od czasu niezależne.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 **Układy współrzędnych**
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkątnego kwadratu
 - Przyspieszenie

Układ współrzędnych biegunowych

W celu lepszej wizualizacji zadania rozważmy przestrzeń 2D, a w niej wprowadźmy biegunowy układ współrzędnych (r, φ) , gdzie r – promień wodzący punktu M , φ – kąt pomiędzy osią $0x_1$ prostokątnego układu współrzędnych a promieniem wodzącym r , liczony w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 3: Biegunowy układ współrzędnych

Układ współrzędnych biegunowych

Bez kłopotu stwierdzamy, że jeśli punkt M ma w prostokątnym układzie współrzędnych współrzędne (x_M, y_M) , to można je wyrazić we współrzędnych biegunowych w następujący sposób

$$x_M = r_M \cos \varphi_M, \quad y_M = r_M \sin \varphi_M. \quad (10)$$

Związki te są jednoznaczne z dokładnością do wielokrotności okresów funkcji trygonometrycznych, więc możemy znaleźć zależności odwrotne

$$r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}, \quad \varphi_M = \operatorname{arctg} \frac{y_M}{x_M}. \quad (11)$$

Od teraz będziemy opuszczać indeks M tam, gdzie nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

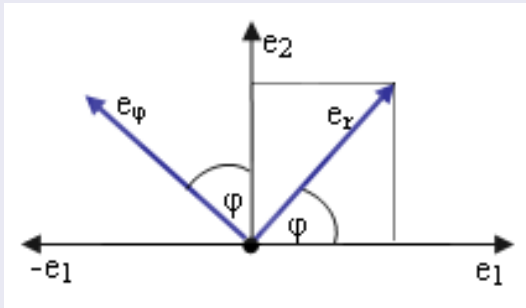
Układ współrzędnych biegunowych

Ze wzoru (3) wynika, że

$$\mathbf{r} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (12)$$

przy czym jest oczywiste, że tu $a_\varphi = 0$, a $a_r = |\mathbf{r}| = r$. Położenie i orientacja wektorów bazy biegunowego układu współrzędnych jest taka jak na rys. 3. Spróbujmy wyrazić je poprzez wektory kartezjańskiego układu współrzędnych. Pomocna może być konstrukcja pokazana na rys. 4.

Układ współrzędnych biegunowych



Rys. 4: Konstrukcja geometryczna do opisu biegunowego układu współrzędnych

Układ współrzędnych biegunowych

Z niezależności wektorów bazy (i z rysunku) wynika, że nowe wektory bazy \mathbf{e}_r i \mathbf{e}_φ są kombinacją liniową starych wektorów bazy \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= a_{r1} \mathbf{e}_1 + a_{r2} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\varphi &= a_{\varphi1} \mathbf{e}_1 + a_{\varphi2} \mathbf{e}_2,\end{aligned}\tag{13}$$

a z żądania, by ich długość była jednostkowa, czyli $e_\varphi = e_r = 1$, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2.\end{aligned}\tag{14}$$

Układ współrzędnych biegunowych

W zapisie macierzowym równanie (13) przyjmuje postać $\mathbf{e}^b = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^p$, czyli w postaci rozwiniętej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

gdzie $\mathbf{e}^b = [\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi]^T$ – macierz wektorów bazy biegunowego układu współrzędnych, \mathbf{A} – macierz transformacji układów współrzędnych, a $\mathbf{e}^p = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]^T$ – macierz wektorów bazy prostokątnego układu współrzędnych. Widać, że wyznacznik macierzy transformacji $|\mathbf{A}| = 1$.

Układ współrzędnych biegunowych

Jeśli kąt φ jest funkcją czasu (jest zmienny w czasie), jak to miejsce w wielu sytuacjach, czyli

$$\varphi = \varphi(t), \quad (16)$$

to wektory bazy również zależą od czasu

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(t), \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t). \quad (17)$$

Układ współrzędnych biegunowych

Policzmy prędkość punktu M . Ze wzoru (12) wynika, że

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r. \quad (18)$$

Jeśli skorzystamy ze wzoru (13)₁, to otrzymamy, iż

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\sin \varphi \dot{\varphi} \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \dot{\varphi} \mathbf{e}_2 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (19)$$

Podobnie łatwo można wykazać, że

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r. \quad (20)$$

Ostatecznie więc

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (21)$$

Układ współrzędnych biegunowych

Wzór na przyspieszenie jest nieco bardziej skomplikowany

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (22)$$

Po wstawieniu wyrażeń (19) i (20) dostajemy

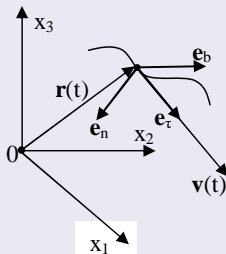
$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi. \quad (23)$$

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych**
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych**
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkątnego kwadratu
 - Przyspieszenie

Układ współrzędnych normalnych

...jest bardzo często stosowany w fizyce, np. w kinematyce i akustyce, gdyż jest związany z trajekcją ruchu danego obiektu. Tworzą go trzy wersory: \mathbf{e}_τ – styczny, \mathbf{e}_n – normalny, i \mathbf{e}_b – binormalny .



Rys. 5: Układ współrzędnych normalnych

Układ współrzędnych normalnych

Wersor styczny \mathbf{e}_τ jest styczny do trajektorii, a więc jest równoległy do wektora prędkości $\mathbf{v}(t)$, czyli

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v \mathbf{e}_\tau. \quad (24)$$

Można więc wyliczyć \mathbf{e}_τ

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\mathbf{v}(t)}{v} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|}. \quad (25)$$

Wersor normalny \mathbf{e}_n leży w płaszczyźnie prostopadłej do wersora \mathbf{e}_τ , więc ma nieskończenie wiele możliwości orientacji. Istnieje bardzo prosta procedura, która pozwala usunąć tę niejednoznaczność i zdefiniować go w sposób jednoznaczny.

Układ współrzędnych normalnych

Zauważmy, że

$$\mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\tau = 1. \quad (26)$$

Zróżniczkujmy ten wzór względem czasu:

$$\frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} \cdot \mathbf{e}_\tau + \mathbf{e}_\tau \cdot \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} = 0, \quad (27)$$

skąd wynika, że wektor \mathbf{e}_τ jest prostopadły do $\frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt}$. Możemy więc po prostu zdefiniować \mathbf{e}_n poniższym wzorem, by równocześnie znormalizować go do jedności

$$\mathbf{e}_n = \frac{\frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} \right|}. \quad (28)$$

Układ współrzędnych normalnych

W przestrzeni 2D chwilowy promień krzywizny trajektorii leży zawsze w płaszczyźnie krzywej (bo nie ma innego wyboru) i jest prostopadły do stycznej, czyli do wersora e_T . W przestrzeni 3D jest to zagadnienie dużo trudniejsze i potrzebna jest pewna „umowa społeczna”. Umówiono się, że kierunek *chwilowego promienia krzywizny trajektorii* (czyli kierunek normalny) jest równoległy do e_n .

Układ współrzędnych normalnych

Trzeci wersor triady wersorów normalnego układu współrzędnych, wersor binormalny, jest już bardzo łatwo określić. Jest to po prostu wynik iloczynu wektorowego wersora stycznego i wersora normalnego (dla układu prawoskrętnego – zwróćmy uwagę, że iloczyn wektorowy jest nieprzemienne)

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_\tau \times \mathbf{e}_n. \quad (29)$$

Wektor prędkości jest dany wzorem (24), więc przyspieszenie znajdziemy niemal natychmiast

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{v} \mathbf{e}_\tau + v \dot{\mathbf{e}}_\tau = \dot{v} \mathbf{e}_\tau + v \left| \frac{d\mathbf{e}_\tau}{dt} \right| \mathbf{e}_n. \quad (30)$$

Układ współrzędnych normalnych

Przyspieszenie ma zatem dwie składowe: pierwsza opisuje przyspieszenie styczne do trajektorii ruchu, a druga opisuje przyspieszenie dośrodkowe. Szczególnie dobrze to widać gdy ruch odbywa się po okręgu o stałym promieniu.

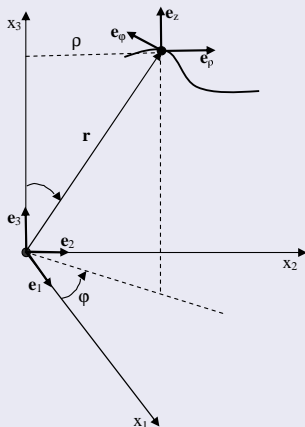
Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych**
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych**
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkątnego kwadratu
 - Przyspieszenie

Układ współrzędnych walcowych

Układ współrzędnych walcowych (cylindrycznych) generują trzy wektory bazowe: \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_z (patrz rys. 6), gdzie ρ – promień cylindra na którym leży nasz punkt, φ – kąt między osią $0x_1$ a rzutem wektora wodzącego \mathbf{r} na płaszczyznę x_1x_2 , z – wysokość x_3 nad płaszczyznę x_1x_2 . Wraz z ruchem punktu, na który wskazuje wektor wodzący \mathbf{r} , wektory bazowe \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_z zmieniają swą orientację.

Układ współrzędnych walcowych



Rys. 6: Układ współrzędnych walcowych

Układ współrzędnych walcowych

Z rys. 6 widać, że wektor \mathbf{r} ma dwie składowe: jedna jest równoległa do wektora \mathbf{e}_ρ , a druga do wektora \mathbf{e}_z . Tak więc

$$\mathbf{r}(t) = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z. \quad (31)$$

skąd łatwo już obliczymy prędkość

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z. \quad (32)$$

Układ współrzędnych walcowych

Aby znaleźć tę prędkość, musimy wyrazić wersor \mathbf{e}_ρ przez \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 – niezmiennie w czasie wersory nieruchomego układu współrzędnych. Z rys. 6 wynika, że

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi, \quad (33)$$

oraz że

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi. \quad (34)$$

Ponieważ

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = -\mathbf{e}_1 \dot{\varphi} \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (35)$$

oraz

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi - \mathbf{e}_2 \dot{\varphi} \sin \varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho, \quad (36)$$

Układ współrzędnych walcowych

więc ostatecznie wektor prędkości ma trzy składowe

$$\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z, \quad (37)$$

a jego długość wynosi

$$|\mathbf{v}(\mathbf{t})| = \sqrt{(\dot{\rho})^2 + (\rho \dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2}. \quad (38)$$

Układ współrzędnych walcowych

Postępując analogicznie łatwo znajdujemy wektor przyspieszenia

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
 &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho (\dot{\varphi})^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z,
 \end{aligned} \tag{39}$$

oraz jego wartość

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho (\dot{\varphi})^2)^2 + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \tag{40}$$

Układ współrzędnych walcowych

Przykład

Przypatrzmy się, jak wygląda modelowanie ruchu jednostajnego po okręgu we współrzędnych cylindrycznych. Jeśli ruch odbywa się po okręgu, to wtedy $z = \text{const.}$ (jeśli $z \neq \text{const.}$, to ruch odbywa się po elipsie lub po spirali). Możemy położyć śmiało

$$z = 0.$$

Ruch po okręgu oznacza również, że promień nie ulega zmianie, więc mamy oczywiście

$$\rho = R = \text{const.}$$

Układ współrzędnych walcowych

Przykład c.d.

Ruch jednostajny to taki, że odbywa się ze stałą prędkością liniową, czyli

$$\varphi = \omega t = \text{const.}$$

gdzie ω – niezmienna (stała) prędkość kątowa. Wymienione warunki wstawione do równań (31), (37) i (39) dają w rezultacie

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= R \mathbf{e}_\rho, \\ \mathbf{v}(t) &= \omega R \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{a}(t) &= -\omega^2 R \mathbf{e}_\rho, \end{aligned} \tag{41}$$

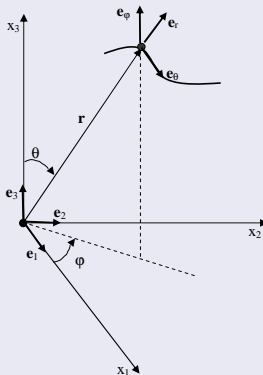
czyli dokładnie opis ruchu jednostajnego po okręgu. Równania (31), (37) i (39) przeszły test pozytywnie.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych**
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych**
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkąta kwadratowego
 - Przyspieszenie

Układ współrzędnych sferycznych

Układ współrzędnych sferycznych również jest bardzo użyteczny. Definiują go trzy wersory: \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_θ (patrz rys. 7).



Rys. 7: Układ współrzędnych sferycznych

Układ współrzędnych sferycznych

Związek tych nowych wersorów z wersorami nieruchomego kartezjańskiego układu współrzędnych jest następujący:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) - \sin \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (42)$$

Wektor wodzący $\mathbf{r}(t)$ opisywanego punktu we współrzędnych sferycznych opisuje się wzorem

$$\mathbf{r}(t) = r \mathbf{e}_r. \quad (43)$$

Układ współrzędnych sferycznych

Wykorzystując praktykę zdobytą przy określaniu prędkości i przyspieszenia we współrzędnych walcowych łatwo stwierdzimy, że we współrzędnych sferycznych

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta} \cos \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \sin \theta (-\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2) \\ &\quad - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_3 = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_2 = -\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) - \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \cos \theta (-\dot{\varphi} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi \mathbf{e}_2) \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (45)$$

Układ współrzędnych sferycznych

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r(\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ & + r \dot{\varphi} \sin \theta \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\mathbf{e}}_\theta. \end{aligned} \quad (47)$$

Wyrażenie (47) można jeszcze dalej przekształcić i wyrazić je we współrzędnych \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ i \mathbf{e}_θ korzystając ze wzorów (42) i (45).

Kinematyka punktu materialnego

W fizyce, podobnie jak w matematyce, bardzo często posługujemy się idealizacjami, czyli pewnymi obiektami lub sytuacjami, które w rzeczywistości nie występują. Wyidealizowany obiekt oddaje nieocenione usługi, gdyż pozwala skupić się na pewnych charakterystycznych zachowaniach i pozwala uwypuklić określone cechy w stanie „czystym” bez zbędnych lub pomijalnych w danych okolicznościach szczegółów.

Takim wyidealizowanym obiektem w powyższym sensie jest *punkt materialny*. Jest to przejęty z matematyki 0-wymiarowy punkt geometryczny obdarzony przez fizyków atrybutem zwanym *masą*. Masa w fizyce przejawia się na dwa sposoby:

- jako masa bezwładna,
- jako masa ciężka.

Kinematyka punktu materialnego

Masa bezwładna, będąca miarą bezwładności ciała, określa jakiej siły należy użyć, aby nadać ciału określoną prędkość: na ciało o większej masie bezwładnej musi działać większa siła. Masa ciężka, z kolei, przejawia się w zjawiskach grawitacyjnych w wyniku przyciągania się ciał materialnych. Nie jest wcale oczywiste, czy te dwie masy są sobie równe czy nie. Z porównania wzorów na siłę wynikającą z II zasady dynamiki Newtona i z prawa powszechnego ciężenia możemy tylko stwierdzić, że te masy są do siebie proporcjonalne. Ich równość można więc udowodnić tylko na drodze doświadczalnej. Eksperyment mogący rozstrzygnąć ten problem zaplanował Newton. Wykorzystał on mianowicie fakt, że dla małych kątów wychylenia okres wahadła prostego T wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_b l}{m_g g}}, \quad (48)$$

gdzie m_b – masa bezwładna, m_g – masa ciężka, l – długość wahadła, g – przyspieszenie ziemskie. Pomiary przeprowadził dla różnych substancji i stwierdził, że okres wahadła nie ulegał zmianie, skąd wynika, że $m_b/m_g = 1$, a więc masy te są sobie równe.

Kinematyka punktu materialnego

Dużo bardziej precyzyjne doświadczenia, niż mógł to zrobić Newton, w latach 1889-1908 wykonał Roland Eötvös i wykazał, że w granicach błędu doświadczalnego rzędu $5 \cdot 10^{-9}$ obie te masy, bezwładna i ciężka, są sobie równe. Dokładność pomiarów Eötvösa w roku 1964 zwiększył kilkaset razy R.H. Dicke, ale końcowy wynik był taki sam – masy są sobie równe. Badanie przyczyn równości tych mas doprowadziło do głębszego zrozumienia istoty grawitacji i do powstania ogólnej teorii względności Einsteina.

Kinematyka punktu materialnego

Ślad, jaki zakreśla w przestrzeni punkt materialny w trakcie swego ruchu, nazywamy *trajektorią punktu materialnego*. Jak ta trajektoria wygląda, zależy od wyboru układu odniesienia. W podręcznikach fizyki przytacza się kilka, już klasycznych, przykładów takiej zależności. Przypomnijmy tu tylko dwa z nich.

- 1 Punkt materialny upuszczony swobodnie w pojeździe poruszającym się ze stałą prędkością w układzie odniesienia związanym z pojazdem zakreśli trajektorię prostoliniową skierowaną pionowo w dół, natomiast w nieruchomym układzie odniesienia związanym z terenem, po którym ten pojazd się przemieszcza, trajektoria będzie miała kształt paraboli.
- 2 Punkt materialny umieszczony na końcu śmigła lecącego samolotu w układzie odniesienia związanym z samolotem będzie się przemieszczał po okręgu, natomiast w nieruchomym układzie odniesienia związanym z ziemią będzie to helisa (krzywa spiralna).

Kinematyka punktu materialnego

Tak więc, trajektoria jest pojęciem względnym. Nie można mówić o trajektorii w ogóle, natomiast można mówić o trajektorii w określonym układzie odniesienia. Zwracamy na ten fakt szczególną uwagę, by nie zapomnieć o nim w trakcie budowy modeli komputerowych zjawisk fizycznych.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkianu kwadratowego
 - Przyspieszenie

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

Kinematyka zajmuje się badaniem ruchu ciał bez zwracania uwagi na przyczyny, które ten ruch wywołały. Położenie ciała w każdej chwili t , na przykład punktu materialnego lub obiektu rozległego, opisane jest *funkcją ruchu*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t). \quad (49)$$

Na postać funkcji \mathbf{x} nie nakładamy tu żadnych ograniczeń oprócz jednego: funkcja ta musi być ciągła. Z punktu widzenia fizyki oznacza to, że **ciało nie może zniknąć** w jednym miejscu i w następnej chwili pojawić się w innym. Tak więc, chwilowo zaprzeczamy istnieniu teleportacji^a.

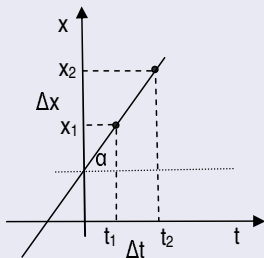
^aW literaturze naukowej pojawiły się już pierwsze doniesienia o eksperymentalnym potwierdzeniu teleportacji na poziomie zjawisk kwantowych. Tu zajmujemy się makroświatem.

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

Funkcja x może mieć postać bardzo prostą. Może to być na przykład funkcja liniowa

$$x = A t + B. \quad (50)$$



Rys. 8: Liniowa funkcja ruchu

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

Rysunek 8 przedstawia ruch jednowymiarowy na płaszczyźnie. W przypadku ruchu w 3D, jak to sugeruje równanie (50), mamy do czynienia z trzema kątami kierunkowymi α_i , $i = 1, 2, 3$, dla każdej osi osobno. Kąt α określa tempo w jakim zmienia się przebyta droga: im α większe, tym trzeba mniej czasu $\Delta t = t_2 - t_1$ by przebyć określoną drogę $\Delta x = s = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$. Z rys. 8 widać, że

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (51)$$

Wielkość tę nazywamy prędkością i oznaczamy literą $v = |\mathbf{v}|$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{At_2 + B - At_1 - B}{t_2 - t_1} = A. \quad (52)$$

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

W przypadku ruchu opisanego równaniem (50), v jest stałe dla wszystkich przedziałów Δt i dla wszystkich chwil t , a więc nie zależy od t . Ruch dany takim równaniem nazywamy *ruchem jednostajnym* i opisujemy w podręcznikach fizyki równaniem

$$s = v t + s_0, \quad (53)$$

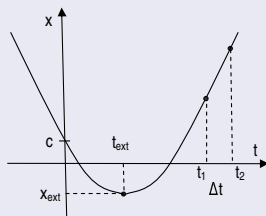
gdzie s_0 – droga początkowa w chwili $t = t_0 = 0$.

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

W kolejce do opisu ruchu funkcjami bardziej skomplikowanymi stoją funkcje nieliniowe. Tu mamy do dyspozycji przeogromne możliwości. Najprostszymi funkcjami nieliniowymi są funkcje wielomianowe, a z nich najprostszą jest trójkąt kwadratowy

$$x(t) = A t^2 + B t + C. \quad (54)$$



Rys. 9: Kwadratowa funkcja ruchu

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkianu kwadratowego
 - Przyspieszenie

Kinematyka punktu materialnego

Trójkian kwadratowy

- punkty przecięcia krzywej z osią $0t$

$$t_1^0 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad t_2^0 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \Delta = B^2 - 4AC, \quad (55)$$

- punkt przecięcia krzywej z osią $0x$

$$t = 0, \quad x = C, \quad (56)$$

- punkt ekstremalny

$$t_{\text{ext}} = \frac{-B}{2A}, \quad x_{\text{ext}} = x(t_{\text{ext}}) = -\frac{B^2}{4A} + C. \quad (57)$$

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

Jeśli zechcemy przy obliczaniu prędkości postąpić podobnie jak dla ruchu jednostajnego, to napotkamy na pewną niewielką trudność, ale pokonanie jej pozwoli lepiej zrozumieć czym jest prędkość. Rzeczywiście,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = A(t_2 + t_1) + B, \quad (58)$$

gdzie B możemy interpretować jako prędkość początkową. Nie bardzo wiadomo, co wzór (58) znaczy, jeśli nie śledziliśmy jego wyprowadzenia. Z definicji jest to *prędkość średnia* w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ dla funkcji ruchu określonej wzorem (54).

Kinematyka punktu materialnego

Prędkość

A co trzeba zrobić, jeśli chcemy znać *prędkość chwilową* w dowolnej chwili t ? Oczywiście, należy przejść do granicy z $t_2 \rightarrow t_1$. Wtedy $\Delta t \rightarrow 0$, i

$$v(t) = 2A t + B. \quad (59)$$

Ten sam wynik otrzymamy dużo szybciej, jeśli skorzystamy z rachunku różniczkowego. Wtedy

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2A t + B. \quad (60)$$

Ze wzoru (60) wynika, że w ruchu opisywanym równaniem (54) prędkość zależy od czasu t . Ruchy tego rodzaju nazywamy *ruchami zmiennymi*. W pierwszym przykładzie droga była liniową funkcją czasu i ruch ten nazwalibyśmy *jednostajnym*. Tutaj liniową funkcją czasu jest prędkość, więc ruch ten nazywamy *ruchem jednostajnie zmiennym*.

Spis treści

- 1 Wstęp
- 2 Układ odniesienia
- 3 Układy współrzędnych
 - Układ współrzędnych biegunowych
 - Układ współrzędnych normalnych
 - Układ współrzędnych walcowych
 - Układ współrzędnych sferycznych
- 4 Kinematyka punktu materialnego
 - Prędkość
 - Punkty charakterystyczne trójkianu kwadratowego
 - Przyspieszenie

Kinematyka punktu materialnego

Przyspieszenie

Prędkość zmian prędkości nazywamy przyspieszeniem i oznaczamy literą $a(t)$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \quad (61)$$

Dla ruchu opisanego funkcją ruchu (54) przyspieszenie jest wielkością stałą i wynosi

$$a(t) = 2A. \quad (62)$$

Jest to jeszcze jeden powód, by ruch ten nazwać *ruchem jednostajnie zmiennym*.

Kinematyka punktu materialnego

Przyspieszenie

Zauważmy, że przyspieszenie, podobnie jak prędkość, są wektorami. Oznacza to, że mogą one ulegać zmianie nie tylko wtedy gdy zmianie ulega ich wartość bezwzględna, czyli długość odpowiednich wektorów, ale również ich kierunek i zwrot. Sytuację taką obserwujemy np. w ruchu jednostajnym po okręgu, gdy długość wektora prędkości nie ulega zmianie, a zmienia się tylko kierunek wektora stycznego do trajektorii.

Kinematyka punktu materialnego

Podsumowanie

Wprowadziliśmy następujące trzy bardzo ważne pojęcia:

- 1 trajektoria, czyli ruch: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$;
- 2 prędkość: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$;
- 3 przyspieszenie: $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}$.

Koniec? :-)

Koniec wykładu 3