Fizyka dla Informatyków
Wykład 2

MODELOWANIE PROCESÓW FIZYCZNYCH

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Modelowanie

Cytaty

- *Cum Deum calculat, fit mundus* (G.W. Leibniz)
- *Computo ergo sum* (lekka wariacja z Kartezjusza)
- *Everything should be made as simple as possible but not simpler* (A. Einstein)

Definicje

- **Modelowanie jest:** badaniem właściwości modelu samego w sobie
- **Symulacja jest:** eksperymentowaniem z modelem, mającym na celu predykcję zachowań dynamicznych oryginału

Modelowanie

Cytaty

- *Cum Deum calculat, fit mundus* (G.W. Leibniz)
- *Computo ergo sum* (lekka wariacja z Kartezjusza)
- *Everything should be made as simple as possible but not simpler* (A. Einstein)

Definicje

- **Modelowanie jest:** badaniem właściwości modelu samego w sobie
- **Symulacja jest:** eksperymentowaniem z modelem, mającym na celu predykcję zachowań dynamicznych oryginału

Modelowanie

Cytaty

- *Cum Deum calculat, fit mundus* (G.W. Leibniz)
- *Computo ergo sum* (lekka wariacja z Kartezjusza)
- *Everything should be made as simple as possible but not simpler* (A. Einstein)

Definicje

- **Modelowanie jest:** badaniem właściwości modelu samego w sobie
- **Symulacja jest:** eksperymentowaniem z modelem, mającym na celu predykcję zachowań dynamicznych oryginału

Modelowanie

Cytaty

- *Cum Deum calculat, fit mundus* (G.W. Leibniz)
- *Computo ergo sum* (lekka wariacja z Kartezjusza)
- *Everything should be made as simple as possible but not simpler* (A. Einstein)

Definicje

- **Modelowanie jest:** badaniem właściwości modelu samego w sobie
- **Symulacja jest:** eksperymentowaniem z modelem, mającym na celu predykcję zachowań dynamicznych oryginału

Modelowanie

Cytaty

- *Cum Deum calculat, fit mundus* (G.W. Leibniz)
- *Computo ergo sum* (lekka wariacja z Kartezjusza)
- *Everything should be made as simple as possible but not simpler* (A. Einstein)

Definicje

- **Modelowanie jest:** badaniem właściwości modelu samego w sobie
- **Symulacja jest:** eksperymentowaniem z modelem, mającym na celu predykcję zachowań dynamicznych oryginału

Czy rzeczywistość jest modelowalna?

Postulat Laplace'a:

Umysł, który by znał siły działające w danej chwili w przyrodzie oraz wzajemne położenie wszystkich istotności, z których ona się składa, gdyby zdołał ująć je i poddać analizie - w jednym wzorze zawarłby ruchy największych ciał niebieskich i najdrobniejszych atomów. Nie byłoby dla niego nic niepewnego i zarówno przyszłość, jak i przeszłość świata byłyby obecne dla jego oka ...

... Jesteśmy tak dalecy od chwili, kiedy poznamy wszystkie siły przyrody i różne formy ich oddziaływania, że nie byłoby godnym filozofa negowanie pewnych zjawisk jedynie dlatego, że nie można ich objaśnić przy obecnym stanie wiedzy. Jesteśmy zobowiązani do badania zjawisk tym dokładniej, im trudniej przychodzi nam uznać je za istniejące.

Pierre Simon Laplace

Essai philosophique sur les probabilities, Paris, 1814

Model i jego definicje

- Representation of something, either as a physical object which is usually smaller than the real object, or as a simple description of the object which might be used in calculations.

  Cambridge International Dictionary of English (1995)

- Modelem matematycznym nazywamy układ równań opisujących ilościowo zjawiska obejmowane przez model fizyczny.
- Model matematyczny to operator przekształcający dany sygnał wejściowy
  - $X(t)$ (zmienne wejściowe), w sygnał wyjściowy
  - $Y(t)$ (zmienne wyjściowe)

  danego obiektu:

$$Y(t) = H_t X(t)$$

Cezary Szczepaniak, Podstawy modelowania systemu,

Wydawnictwo Naukowe PWN (1999)

Model i jego definicje

Model matematyczny jest to zbiór matematycznych relacji, opisujących zjawiska fizyczne podlegające podstawowym prawom fizyki w sposób **jednoznaczny, spójny i stabilny.**

Andrzej Krawczyk, Podstawy elektromagnetyzmu matematycznego, (2001)

Model jest jednoznaczny, jeśli dla jednego zbioru danych wejściowych uzyskuje się jedną i tylko jedną odpowiedź.

Model jest spójny, jeśli wszystkie jego elementy posiadają te samą naturę.

Model jest stabilny, jeśli nie jest czuły na małe zaburzenia wielkości wejściowych bądź jego parametrów, czyli małe zmiany danych wejściowych powodują na wyjściu modelu zmiany tego samego rzędu.

Modelowanie

Modelowanie. . .

. . . jest centralnym elementem naukowego rozumowania.

A. Rosenbluth i N. Wiener

Mając do czynienia z modelowaniem, musimy uwzględnić wiele czynników, takich jak:

- Poziom uproszczenia
- Potrzeby eksperymentu
- Poprawność (validity)
- Przydatność (tractability)
- Wiarygodność(credibility)
- Cel (aim)

Modelowanie

Składowe modelu

W pierwszym kroku modelowania musimy zdefiniować składowe modelu (komponenty), jako elementarne składniki modelu (np. elementy obwodu elektrycznego).

Każda składowa jest opisana poprzez zmienne opisowe, które dzielą się na:

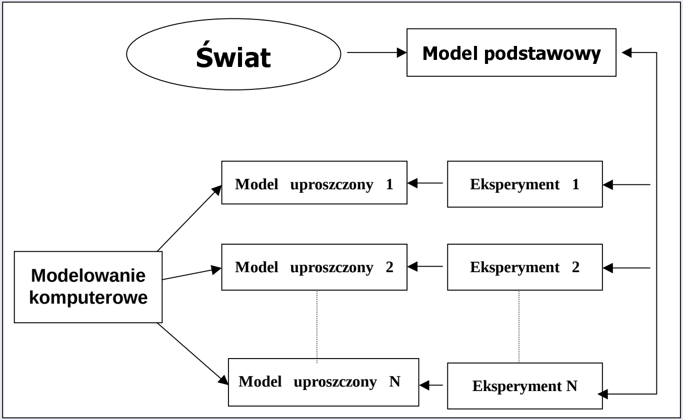
- zmienne wejściowe,
- zmienne stanu,
- zmienne wyjściowe.

Modelowanie

Planowanie eksperymentu

Zbiór wszystkich zmiennych opisowych pozwala nam zaplanować eksperyment. Dla tego samego systemu rzeczywistego, możemy przeprowadzać różne eksperymenty. Na przykład model obwodu elektrycznego może badać prądy i napięcia we wszystkich elementach obwodu. Inny eksperyment może koncentrować się na temperaturze wszystkich elementów i/lub na rozkładzie temperatury w obwodzie. Oczywiste jest więc, że różne eksperymenty prowadzą do różnych modeli i spełniają różne wymagania modelowe. Każdy eksperyment prowadzi do pewnego uproszczonego modelu, jak to pokazano na Rys. 1.

Świat i jego modele



Rys. 1: Świat i jego modele

Modelowanie

Model podstawowy

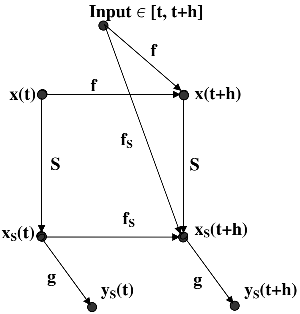
dokładnie odwzorowuje świat rzeczywisty. Takie modele na ogół nie istnieją.

Sformułowanie zadania i ograniczenia techniczne (komputer, na którym wykonujemy program symulacyjny) w sposób naturalny ograniczają liczbę możliwych modeli uproszczonych. Jeśli jest więcej niż jedno uproszczenie spełniające te kryteria, to musimy zastosować inne zasady wyboru, np. koszt modelowania.

Świat i jego modele

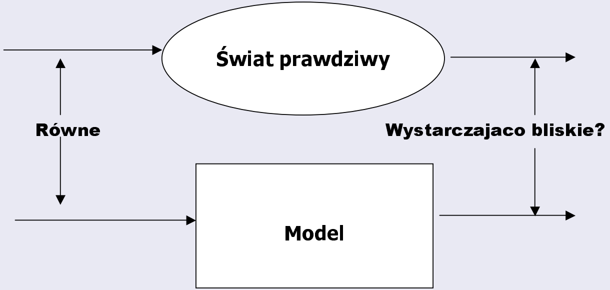
Poprawność modelu (validation)

Walidacja modelu jest jednym z centralnych problemów modelowania i symulacji. Rozważmy rzeczywisty model dynamiczny i jego model. Niech S będzie operacją modelowania (przejście od układu rzeczywistego do modelu). Niech $x(t)$ oznacza stan układu w chwili t, $y(t)$ dane wyjściowe, a f funkcję przejścia, odwzorowującą stan $x(t)$ i dane wejściowe w przedziale czasu $[t, t+h]$ w nowy stan $x(t+h)$. Te same symbole z indeksem S oznaczają wielkości modelowe. Dany model jest wybrany zasadnie wtedy i tylko wtedy, gdy poniższy diagram komutuje:



Świat i jego modele

Powyższa definicja poprawności modelu jest trudna w zastosowaniach praktycznych. Bardziej praktyczne podejście jest poprawność wejścia - wyjścia (input-output validity), reprezentowany przez poniższy diagram:



Rys. 3: Poprawność modelu

Modelowanie

Zauważmy, że każda aproksymacja rzeczywistego ciągłego systemu przez model z czasem dyskretnym jest niepoprawna.

Przykład:

W procesie rzeczywistym zakłócenia mogą pojawiać się w przedziale czasu mniejszym od kroku czasowego dyskretyzacji, a więc nie są wychwytywane przez model dyskretny.

Niepoprawność modelu wynika często ze złych założeń. Utworzenie uproszczonego modelu idealizującego świat rzeczywisty może dać model niepoprawny fizykalnie.

Modelowanie

Przydatność modelu (tractability)

Jest znanym faktem, że niektóre problemy mające piękny matematycznie opis nie mogą być rozwiązane dostępnymi nam metodami. To samo dotyczy modeli traktowanych jako zadanie do symulacji komputerowej. Są one albo zbyt czasochłonne, albo zbyt kosztowne.
Model lub zadanie symulacyjne są nieprzydatne, jeśli jego złożoność obliczeniowa wzrasta wykładniczo wraz z liczbą zmiennych opisowych.
Złożoność obliczeniowa może być wstępnie zdefiniowana jako minimalny koszt gwarantujący uzyskanie odpowiedzi na pytanie (zadanie symulacyjne) leżącej poniżej wymaganego progu błędu.
Najczęściej cytowanym przykładem takiego nie dającego się rozwiązać problemu, jest zadanie komiwojażera. Inny przykład to symulacja powrotu na Ziemię promu kosmicznego (zadanie z dynamiki płynów).

Josef F. Traub, Henryk Woźniakowski,

Breaking intractability, Scientific American, January 1994

Modelowanie

Wiarygodność modelu (credibility)

Model jest wiarygodny, jeśli użytkownik wierzy, że jest poprawny i użyteczny. Oznacza to, że model może być poprawny, ale nie wiarygodny. Również model wiarygodny może być niepoprawny. Najlepszym sposobem na budowanie modeli wiarygodnych jest włączenie przyszłego użytkownika w proces tworzenia modelu.

Spis treści

Formalizm Lagrange'a

Wariacja funkcji

Wariacją funkcji $y(x)$ nazywamy różnicę pomiędzy daną funkcją $y(x)$ a "bliską" jej funkcją $y_1(x)$:

$$\delta y(x) = y_1(x) - y(x)\,. \tag{1}$$

Pierwsza wariacja funkcji

$$\delta F(y, y', x) = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,, \tag{2}$$

gdzie

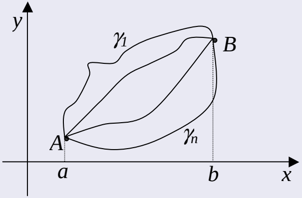
$$\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}\,. \tag{3}$$

Formalizm Lagrange'a

Pierwsza wariacja funkcjonału

$$\partial I[\gamma] = \int_a^b \delta F(y, y', x) dx \,. \tag{4}$$

Zasada Hamiltona



Rys. 4: Porównawcze krzywe ruchu

Formalizm Lagrange'a

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$\delta I = 0 = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y dx \,. \tag{5}$$

Druga wariacja

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2 \right\} dx \,. \tag{6}$$

$\delta^2 I < 0$ – maksimum; $\delta^2 I > 0$ – minimum

Formalizm Lagrange'a

Twierdzenie Noether

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera-Lagrange'a dla pewnego funkcjonału I i jeżeli ten funkcjonał jest niezmiennikiem pewnej grupy transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania, przy czym wielkości tych jest dokładnie tyle, iloparametrowa jest grupa transformacji symetrii funkcjonału I.

Emma Noether, 1916

Niezmienniczość ze względu na:

- translacje czasu: prawo zachowania energii $E_k + V = \text{const}$;
- translacje przestrzenne: prawo zachowania pędu $\mathbf{p} = \text{const}$;
- obroty: prawo zachowania momentu pędu $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$.

Formalizm Lagrange'a

Twierdzenie Noether

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera-Lagrange'a dla pewnego funkcjonału I i jeżeli ten funkcjonał jest niezmiennikiem pewnej grupy transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania, przy czym wielkości tych jest dokładnie tyle, iloparametrowa jest grupa transformacji symetrii funkcjonału I.

Emma Noether, 1916

Niezmienniczość ze względu na:

- translacje czasu: prawo zachowania energii $E_k + V = \text{const}$;
- translacje przestrzenne: prawo zachowania pędu $\mathbf{p} = \text{const}$;
- obroty: prawo zachowania momentu pędu $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$.

Formalizm Lagrange'a

Twierdzenie Noether

Jeżeli równania ruchu są równaniami Eulera-Lagrange'a dla pewnego funkcjonału I i jeżeli ten funkcjonał jest niezmiennikiem pewnej grupy transformacji, to istnieje pewna liczba praw zachowania, przy czym wielkości tych jest dokładnie tyle, iloparametrowa jest grupa transformacji symetrii funkcjonału I.

Emma Noether, 1916

Niezmienniczość ze względu na:

- translacje czasu: prawo zachowania energii $E_k + V = \text{const}$;
- translacje przestrzenne: prawo zachowania pędu $\mathbf{p} = \text{const}$;
- obroty: prawo zachowania momentu pędu $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}$.

Spis treści

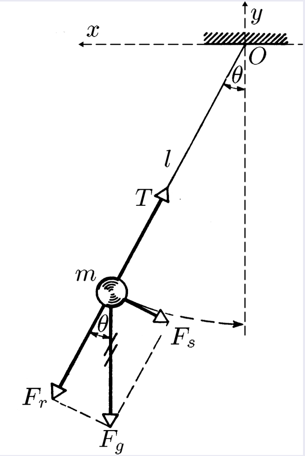
Wahadło płaskie

Wahadłem

nazywamy układ mechaniczny składający się z punktu materialnego umieszczonego w jednorodnym polu grawitacyjnym i poddanego takim więzom, które zezwalają na ruch tego punktu materialnego wokół pewnego punktu materialnego.

Jeżeli więzy nałożone na ruch wahadła albo też dobrane w szczególny sposób warunki początkowe powodują, że punkt materialny w czasie swojego ruchu pozostaje stale w jednej płaszczyźnie pionowej, to wahadło nazywamy płaskim.

Wahadło płaskie



Rys. 5: Wahadło płaskie

Wahadło płaskie

Równanie Lagrange'a

$$m\,\ddot{s} = F_y \frac{dy}{ds} \tag{7}$$

gdzie s – długość łuku jako współrzędna uogólniona, $F_y = -mg$ – y-owa składowa siły ciążenia.

Ruch jest harmoniczny, jeśli

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0\,, \tag{8}$$

czyli

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\omega^2}{g}\,s\,, \tag{9}$$

którego całka wynosi

$$y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}\,s^2\,. \tag{10}$$

Wahadło płaskie

Parametryzacja

Nowa współrzędna uogólniona φ: $r = 4R\sin(\varphi/2) \hookrightarrow$

$$y = R(1 - \cos\varphi) \tag{11}$$

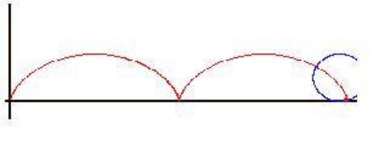
gdzie $R = 1/4\,(g/\omega^2)$; $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1$; czyli

$\dfrac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \dfrac{\omega^4}{g^2}s^2} = \cos(\varphi/2)$; oraz

$$x = R(\varphi + \sin\varphi)\,. \tag{12}$$

Wahadło płaskie

Równania (11) i (12) to parametryczne równania *cykloidy*



Rys. 6: Cykloida

Wahadło płaskie

Rozwiązanie

$$s = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,, \quad \text{lub} \quad s = C\sin(\omega t + \delta)\,. \tag{13}$$

Warunki początkowe

$v_0 = \dot{s}\ (t = 0)$ oraz $s_0 = s\ (t = 0)$

$$s = s_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,, \tag{14}$$

$$s = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,\sin\left[\omega t + \mathrm{arctg}\left(\frac{s_0\omega}{v_0}\right)\right]\,. \tag{15}$$

Wahadło płaskie

Ruch jest *izochroniczny*, czyli okres drgań nie zależy od amplitudy (C)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,. \tag{16}$$

Cykloida jest *brachistochroną* – czas zsuwania się jest minimalny.

Wahadło płaskie

Ruch po okręgu

$$y = R(1 - cos\theta) \tag{17}$$

i równanie ruchu przyjmuje postać:

$$R\ddot{\theta} = -g \sin\theta \,. \tag{18}$$

Małe θ

$\sin\theta \approx \theta$, i

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \,, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \,. \tag{19}$$

Dla małych wychyleń drgania wahadła kolistego są *izochroniczne*.

Wahadło płaskie

Dla dużych wychyleń rozwiązania równania (18) dane są przez całki eliptyczne typu

Całka eliptyczna pierwszego rodzaju

$$F(k,\psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{20}$$

Spis treści

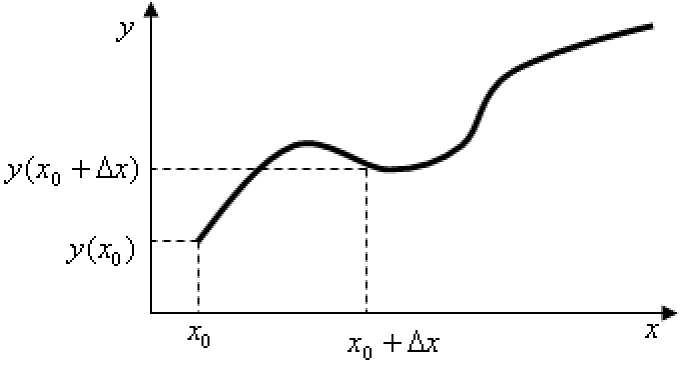
Równania różniczkowe

Symulacje komputerowe zjawisk fizycznych bardzo często wymagają rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych. Jeśli są to układy równań drugiego i wyższych rzędów, należy je sprowadzić do układów równań rzędu pierwszego. Oczywiście, liczba równań zwiększa się. Potrzeba zatem zdefiniować większą liczbę warunków początkowo-brzegowych, ale w zamian mamy do dyspozycji proste algorytmy numerycznego rozwiązywania takich zagadnień. Poniżej przedstawimy kilka z nich.
Rozważmy proste równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y(x), x)\,. \tag{21}$$

Równania różniczkowe

Poszukiwana funkcja $y = y(x)$ jest funkcją tylko jednej zmiennej x, ale nie ogranicza to naszych rozważań, gdyż uogólnienie na większą liczbę zmiennych jest bezpośrednie.



Równania różniczkowe

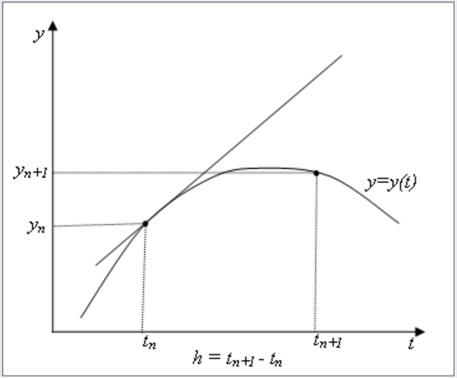
W obliczeniach numerycznych czas jest wielkością dyskretną, w związku z czym równanie różniczkowe (21) musimy zastąpić równaniem różnicowym. Korzystając z definicji pochodnej mamy

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha \,. \tag{22}$$

Łatwo można zauważyć, że α jest to kąt, jaki styczna do krzywej w punkcie t tworzy z osią $0t$.

Równania różniczkowe

Metoda Eulera (metoda stycznych)



Rys. 8: Interpretacja geometryczna metody Eulera

Równania różniczkowe

Metoda Eulera (metoda stycznych)

Jeśli jako warunek początkowy położymy $y(t_0 = 0) = y_0$, to możemy indeksować kolejne wartości funkcji $y(t_n)$ indeksem n, który numeruje nam teraz kolejne kroki czasowe $t_n = t_0 + n\,\Delta t$. Mamy więc w pierwszym przybliżeniu

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(y_n(t_n))\,, \quad y_0 = y(0)\,, \quad n \geq 0\,, \tag{23}$$

gdzie położyliśmy $h = \Delta t$. Równanie (23) jest definicją metody Eulera rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

Równania różniczkowe

Metoda Eulera (metoda stycznych)

Rozwińmy funkcję $y(t)$ w szereg Taylora.

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)\,h + \frac{y''(t)}{2!}\,h^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}}{n!}\,h^n + \ldots \quad (24)$$

Widać, że metoda Eulera jest obcięciem rozwinięcia Taylora już po pierwszej pochodnej czyli: $y(t+h) \equiv y_{n+1}$, $y(t) \equiv y_n$, a $y'(t)\,h \equiv f(y(t))\,h$. Obcięcie rozwiązania względem h w pierwszej potędze oznacza, że metoda Eulera ma dokładność pierwszego rzędu względem rozwinięcia w szereg Taylora, a to oznacza, że błąd obcięcia wynosi $O(h^2)$. Na zakończenie wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie: $k_1 = y'(t_0) = f(y(t_0))$. Będzie nam ono potrzebne później. W tej notacji schemat Eulera dla zerowego kroku ma postać

Równania różniczkowe

Metoda Eulera (metoda stycznych)

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + k_1\, h\,, \tag{25}$$

a dla dowolnego kroku $k_1 = y'(t) = f(y(t))$, czyli

$$y(t + h) = y(t) + k_1\, h\,, \tag{26}$$

Jakość otrzymanego rozwiązania numerycznego zależy od wielkości kroku h – im jest on bliższy zeru, tym rozwiązanie jest bardziej dokładne.

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint

Metoda MidPoint (metoda punktu środkowego) jest udoskonaleniem metody Eulera. Za jej pomocą dla tej samej wartości $h = \Delta t$ możemy otrzymać lepsze przybliżenie wartości rozwiązania. W metodzie MidPoint otrzymuje się w kolejnym kroku iteracyjnym wartość poszukiwanej funkcji nie dla t_n, ale w punkcie $t_n + h/2$, leżącym pośrodku pomiędzy wartością t_n, w którym to punkcie wartość funkcji $y(t)$ jest znana, a punktem t_{n+1}, w którym tej wartości poszukujemy. Metoda ta jest zaliczana do metod Rungego-Kutty (jest to metoda Rungego-Kutty drugiego rzędu, co za chwilę wykażemy).

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint

Metoda MidPoint bazuje na metodzie Eulera, wykorzystując również rozwinięcie w szereg Taylora (24). Mamy zatem

$$y'(t+h/2) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}\,, \tag{27}$$

czyli

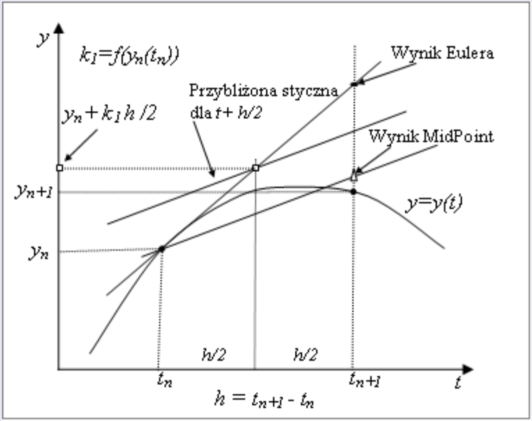
$$y(t+h) \approx y(t) + h\,y'(t+h/2)\,, \tag{28}$$

skąd wynika, że

$$y(t+h) \approx y(t) + h\,f(y(t+h/2))\,. \tag{29}$$

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint



Rys. 9: Interpretacja geometryczna metody MidPoint

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint

Nie możemy w obliczeniach skorzystać bezpośrednio ze wzoru (29), ponieważ nie znamy wartości funkcji y w punkcie $t + h/2$. Rozwiązaniem tej trudności jest skorzystanie ze wzoru (24) w punkcie $t + h/2$

$$y(t + h/2) \approx y(t) + y'(t) \cdot h/2 = y(t) + f(y(t)) \cdot h/2\,. \tag{30}$$

Wstawiając wzór (30) do (29) otrzymujemy

$$y(t + h) \approx y(t) + h\, f(y(t) + f(y(t)) \cdot h/2)\,, \tag{31}$$

co w języku iteracyjnym przyjmuje postać

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(y_n + f(y_n) \cdot h/2)\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{32}$$

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint

Ogólnie, schemat działania metody MidPoint możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n(t_n))\,, \\ k_2 &= f(y_n(t_n) + f(y_n(t_n)) \cdot h/2)\,, \\ y_{n+1} &= y_n + k_2 \cdot h + O(h^3)\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Równania różniczkowe

Metoda MidPoint

Innym możliwym podejściem jest przybliżenie charakteru zmiany funkcji przez uśredniony kąt stycznych k_1 i k_2, a wtedy

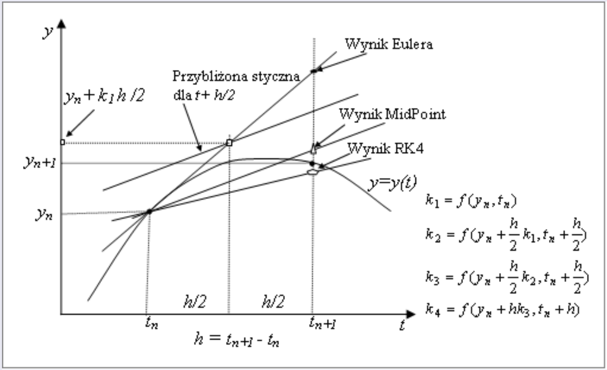
$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} h \,. \tag{34}$$

Jak za chwile zobaczymy, jest to metoda Rungego-Kutty 2-go rzędu.

Spis treści

Równania różniczkowe

Metody Rungego-Kutty



Rys. 10: Interpretacja geometryczna metody Rungego-Kutty RK4

Równania różniczkowe

Metody Rungego-Kutty

Przy wyborze kroku całkowania h należy brać pod uwagę stabilność i dokładność rozwiązania, przy czym należy mieć na uwadze, że

- metody Rungego-Kutty nie są metodami stabilnymi, więc h powinno podlegać ograniczeniom zapewniającym pewna stabilność;
- dokładność otrzymanego wyniku zależy od błędu metody i błędów zaokrągleń; zaokrąglenia są na ogół mało istotne, więc błąd metody jest głównym składnikiem błędu całkowitego.

Na ogół stosuje się metodę Rungego-Kutty rzędu czwartego (RK4), która daje rozwiązania z wystarczającą dokładnością dla zagadnień, w których interesuje nas tylko jakość efektu. W kolejnych wykładach zademonstrujemy jej działanie.

Równania różniczkowe

Metody Rungego-Kutty

Zasada postępowania jest następująca. Na podstawie wartości pochodnej w punkcie $x+h$ (a tę znamy, bo możemy obliczyć tangens kąta nachylenia stycznej do osi $0t$) wyznaczamy przybliżoną wartość pochodnej w punkcie. Następnie, wyznaczymy ponownie przybliżoną wartość pochodnej w punkcie $x+h$, ale tym razem bazując na wyznaczonej w poprzednim kroku wartości pochodnej. Schematycznie możemy zapisać to tak:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n(t_n)), \\ k_2 &= f(y_n(t_n) + k_1 \cdot h/2), \\ k_3 &= f(y_n(t_n) + k_2 \cdot h/2), \\ k_4 &= f(y_n(t_n) + k_3 \cdot h), \end{aligned} \tag{35}$$

Równania różniczkowe

Metody Rungego-Kutty

Przyjmując, że najlepiej charakter zmiany funkcji oddają styczne k_1 oraz k_2, uśrednimy kąt nachylenia stycznej najlepiej przybliżającej charakter zmiany funkcji licząc średnią ważoną

$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \tag{36}$$

i wtedy schemat metody RK4 możemy zapisać następująco:

Równania różniczkowe

Metody Rungego-Kutty

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} h\,. \qquad (37)$$

Po odpowiednim uogólnieniu wzór iteracyjny dla metody Rungego-Kutty rzędu s ma postać

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} w_i k_i\,, \qquad (38)$$

gdzie dla $i = 1$

$$k_1 = h\,f(y_n(t_n))$$

a dla $i > 1$

$$k_i = h\,f(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j)\,,$$

gdzie w_i, a_i, b_{ij} – stałe. Wartości tych stałych na ogół dobiera się eksperymentalnie w celu zapewnienia stabilności rozwiązania.

Koniec?

Koniec wykładu 2