Fizyka dla Informatyków
Wykład 1

PRAWA I TEORIE FIZYKI

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Wstęp

(fysike)

$\varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\eta$ pochodzi z języka greckiego i oznacza naukę o otaczającej nas naturze

Encyklopedia

Fizyka to nauka przyrodnicza o najbardziej ogólnych właściwościach i budowie materii martwej (atomów, cząsteczek, kryształów, cieczy, gazów itd.) oraz o głównych formach jej ruchu lub zmiany (o procesach mechanicznych, cieplnych, elektromagnetycznych, grawitacyjnych, jądrowych i in.).

Wstęp

Metoda fizyki

$$\textit{eksperyment} \longrightarrow \textit{teoria} \longrightarrow \textit{weryfikacja} \longrightarrow \textit{eksperyment} \longrightarrow \ldots$$

Matematyka w swych początkach była nauką eksperymentalną, ale następnie przekształciła się w wiedzę czysto spekulatywną. Często mówi się, że matematyka, to sztuka posługiwania się pojęciami wymyślonymi specjalnie po to, by można było nimi manipulować. Obecnie obserwujemy zaskakujący powrót do korzeni matematyki, gdy wraz z rozwojem informatyki znów pojawiła się matematyka doświadczalna.

Wstęp

Pogląd, że matematyka to zbiór abstrakcyjnych i oderwanych od życia konstrukcji myślowych, jest bardzo naiwny.

Czy fizyka, a w szczególności fizyka współczesna, jest przedmiotem szalenie trudnym i niemożliwym do zrozumienia nawet dla dobrze wykształconej osoby?

Prawa fizyki

Zjawisk fizycznych obserwujemy bardzo dużo. Każdy może przytoczyć ich setki. Naturale jest więc dążenie do uporządkowania naszego obrazu świata i postawienie sobie pytania: w czym te wszystkie zjawiska są różne i w czym są do siebie podobne? Pytania te stawiano sobie od tysiącleci, ale dopiero w ciągu ostatnich czterystu - pięciuset lat udało się je rozsądnie sformułować i uporządkować. Proces ten nie jest jeszcze zakończony, gdyż wciąż odkrywane są nowe prawa, chociażby w dziedzinie cząstek elementarnych i teorii grawitacji.

Prawa fizyki

Prawa fizyki formułowane są na dwa główne sposoby:

1. jako wnioski z obserwacji, np. prawo zachowania energii;
2. jako wnioski wypływające ze sformułowanych teorii (np. prawo zachowania energii wynikające z zastosowania twierdzenia Emmy Noether do badania lagrangianów).

Jak dobrze wiadomo, każda teoria ulega falsyfikacji, więc postęp nauki nie będzie miał (chyba?) końca.

Prawa zachowania

Prawa (zasady) zachowania odgrywają w fizyce bardzo ważną rolę. Nie może powstać coś z niczego, ale też i coś nie może zniknąć bez śladu. Opisuje to (lokalne) równanie różniczkowe

$$a(x,t)\,\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + b(x,t)\,\nabla \boldsymbol{j}(x,t) = Q(x,t)\,, \qquad (1)$$

gdzie $\rho(x,t)$ – gęstość, $\boldsymbol{j}$ – strumień, $Q(x,t)$ – źródło

Prawa zachowania

Równanie ciągłości

Równanie (1) często zapisuje się w bardziej prostej postaci, tzw. *równania ciągłości*: ubytek pewnej wielkości w elemencie objętości musi być równoważony przepływem tej wielkości przez powierzchnię S tego elementu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\oint_S \rho(x,t)\,\mathbf{v}(x,t)\, dS = -\int_V \nabla(\rho(x,t)\,\mathbf{v}(x,t))dV\,. \tag{2}$$

Prawa zachowania

Równanie ciągłości

Zastosowaliśmy tu twierdzenie o dywergencji. Równość musi zachodzić dla dowolnego dV, więc funkcje podcałkowe muszą być równe $\hookrightarrow$ równanie w postaci lokalnej:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(x,t)\, \mathbf{v}(x,t)) = 0\,, \tag{3}$$

lub też lokalne, ale zapisane nieco inaczej

$$\frac{D\rho(x,t)}{Dt} + \rho(x,t)\, \nabla \cdot \mathbf{v}(x,t) = 0\,, \tag{4}$$

gdzie $\frac{D}{D\,t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Zauważmy, że w równaniu ciągłości nie ma członów źródłowych.

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

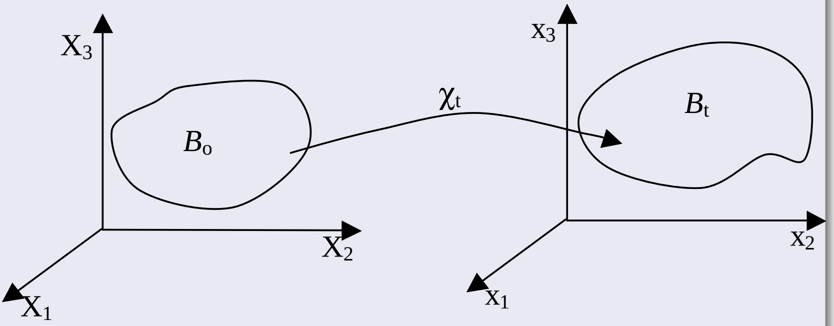
Prawo zachowania masy

Masa

Każdemu ciału przypisana jest pewna miara skalarna m zwana masą i charakteryzująca jego bezwładność. Jest to wielkość nieujemna i addytywna.

Prawo zachowania masy

Konfiguracje ciała



Rys. 1: Konfiguracja odniesienia $\mathcal{B}_0$ w opisie Lagrange'a (X_1, X_2, X_3) i konfiguracja aktualna w opisie Eulera (x_1, x_2, x_3)

Prawo zachowania masy

Całkowita masa ciała jest identyczna w obu konfiguracjach – i w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej, czyli jaka masa była, taka i pozostała

$$m = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, dv \,, \quad 0 \leq \rho \leq \infty \,, \tag{5}$$

ρ_0 – gęstość masy w konfiguracji odniesienia, $\rho(\mathbf{x}, t)$ – gęstość masy w konfiguracji aktualnej.

Prawo zachowania masy

Spójrzmy teraz, jak wygląda aktualna konfiguracja ciała z punktu widzenia konfiguracji odniesienia, czyli w opisie materialnym (Lagrange'a):

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\rho_0 - \rho\, J)\, dV = 0\,, \tag{6}$$

gdzie

$$J = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \right|\,, \tag{7}$$

to Jakobian przejścia.

Prawo zachowania masy

Całka (6) jest równa zeru wtedy i tylko wtedy gdy

$$\rho_0 = \rho\, J\,. \tag{8}$$

W ten sposób otrzymaliśmy *lokalną* zasadę zachowania masy w opisie materialnym.

Prawo zachowania masy

Globalna zasada zachowania masy w konfiguracji aktualnej, czyli w opisie Eulera, ma postać:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{x}, t)\, dv = 0\,. \tag{9}$$

Wzór ten oznacza, że całkowita masa ciała w czasie nie ulega zmianie.

Prawo zachowania masy

Ze wzoru (9) wynika lokalne prawo zachowania masy, gdyż jest ono prawdziwe dla każdej chwili t i dla każdej aktualnej konfiguracji $\mathcal{B}_t$, więc

$$\frac{d}{dt}\,\rho(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\,\rho(\mathbf{x},t) + \rho(\mathbf{x},t)\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0\,. \tag{10}$$

Prawo zachowania masy

Ośrodek nieściśliwy

Jeśli ośrodek jest nieściśliwy, to objętość ciała nie ulega zmianie, a więc i gęstość masy też, a wtedy

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(\mathbf{x}, t) = 0\,, \tag{11}$$

czyli $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})$. W tej sytuacji z równania (10) mamy równocześnie, iż

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0\,. \tag{12}$$

Prawo zachowania masy

Potencjał prędkości

Pole prędkości spełniające równanie (12) nazywamy polem bezźródłowym (nierozbieżnym). Ze znanej tożsamości matematycznej ($\operatorname{div}\operatorname{rot}(\cdot) = 0$) wynika, że prędkość $\mathbf{v}$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{13}$$

gdzie $\mathbf{u}$ – potencjał wektorowy pola prędkości $\mathbf{v}$.

Prawo zachowania masy

Potencjał skalarny prędkości

Ruch ośrodka nazywamy bezwirowym, jeśli

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0\,, \tag{14}$$

i wtedy dla pola prędkości istnieje potencjał skalarny φ

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{grad}\, \varphi(\mathbf{x}, t)\,, \tag{15}$$

gdyż $\operatorname{rot}\, \mathrm{grad}(\cdot) = 0$

Prawo zachowania masy

Potencjały pola prędkości

Przypomnienie

Każde pole wektorowe, a więc i pole prędkości, można w sposób jednoznaczny rozłożyć na sumę dwu pól

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \operatorname{grad}\varphi + \text{rot }\mathbf{u}, \quad \text{z warunkiem } \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\,,$$

gdzie φ – potencjał skalarny, $\mathbf{u}$ – potencjał wektorowy. Z powyższego rozkładu wynika, że

$$\text{rot }\mathbf{v}_1 = \text{rot }\operatorname{grad}\varphi = 0\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_2 = \operatorname{div}\text{rot }\mathbf{u} = 0\,.$$

Pole $\mathbf{v}_1$ nosi nazwę pola bezźródłowego (osiowego), a pole $\mathbf{v}_2$ nazywane jest polem bezwirowym (solenoidalnym).

Prawo zachowania masy

Możemy więc teraz równanie ciągłości dla ruchów bezwirowych przedstawić w postaci

$$\dot{\rho} + \rho\,\Delta\varphi = 0\,. \tag{16}$$

W przypadku ośrodka nieściśliwego, równanie (16) redukuje się do bardzo dobrze znanego równania Laplace'a

$$\Delta\varphi = 0\,. \tag{17}$$

Jak widać, poszukując rozwiązań równania różniczkowego (10), możemy korzystać z różnych założeń upraszczających, często znacznie ułatwiających nasze obliczenia.

Spis treści

1 Wstęp
2 Prawa fizyki
3 Prawa zachowania
- Prawo zachowania masy
- Prawo zachowania pędu
- Prawo zachowania momentu pędu
- Prawo zachowania energii mechanicznej

4 Teorie fizyczne
- Mikołaj Kopernik
- Klaudiusz Ptolomeusz
- Gaspard-Gustave de Coriolis
- Jean Bernard Léon Foucault

5 Komputer a teoria fizyczna

Prawo zachowania pędu

Pęd

Pęd jest to pewna wielkość wektorowa określona dla ciała $\mathcal{B}$ w chwili t:

$$\mathbf{P} \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \rho \, \mathbf{v} dv \,. \tag{18}$$

Prawo zachowania pędu

Zasada zachowania pędu to w istocie nic innego jak drugie prawo dynamiki Newtona, które mówi, że zmiana pędu ciała może być wywołana tylko działającymi na to ciało siłami

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\,, \tag{19}$$

przy czym

$$\mathbf{F} = \int\limits_{\mathcal{B}_t} \rho\,\mathbf{f}\,dv + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t}_{(n)}\,ds\,, \tag{20}$$

f – gęstość sił masowych działających na całą objętość ciała (taką siłą masową jest na przykład siła grawitacji), a $\mathbf{t}_{(n)}$ – siły działające na brzeg ciała $\partial\mathcal{B}_t$.

Prawo zachowania pędu

Przypomnienie

$$\mathbf{t}_{(n)} = \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}\,, \tag{21}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – tensor naprężenia, a $\mathbf{n}$ – wektor normalny do powierzchni brzegu

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int\limits_V a_{i,j}\,dv = \oint\limits_S a_i\,n_j\,ds\,, \tag{22}$$

pozwala zamienić całkę objętościową na powierzchniową i odwrotnie

Prawo zachowania pędu

Równanie (19) możemy zapisać w postaci

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\rho\, \dot{\mathbf{v}} - \rho\, \mathbf{f} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) dv = \mathbf{0}\,. \tag{23}$$

Wzór ten wyprowadziliśmy dla dowolnego ciała $\mathcal{B}$ i dla dowolnej jego konfiguracji $\mathcal{B}_t$, więc aby był on prawdziwy, to musi znikać funkcja podcałkowa $\hookrightarrow$ lokalne prawo zachowania pędu (czyli w postaci równania różniczkowego)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho\, \mathbf{f} = \rho\, \dot{\mathbf{v}}\,. \tag{24}$$

Prawo zachowania pędu

Powyższy zapis to zapis absolutny. We współrzędnych kartezjańskich

$$\sigma_{ij,i} + \rho\, f_j = \rho\, \dot{v}_j \,. \tag{25}$$

Spis treści

1 Wstęp
2 Prawa fizyki
3 Prawa zachowania
- Prawo zachowania masy
- Prawo zachowania pędu
- Prawo zachowania momentu pędu
- Prawo zachowania energii mechanicznej

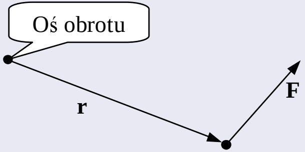
4 Teorie fizyczne
- Mikołaj Kopernik
- Klaudiusz Ptolomeusz
- Gaspard-Gustave de Coriolis
- Jean Bernard Léon Foucault

5 Komputer a teoria fizyczna

Prawo zachowania momentu pędu

Momentem **m** nazywamy iloczyn wektorowy (najkrótszego) wektora **r** łączącego punkt zaczepienia pewnej wielkości wektorowej **F** (np. siły, pędu) z osią obrotu i tej wielkości wektorowej

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \tag{26}$$



Rys. 2: Moment siły

Prawo zachowania momentu pędu

Przypomnienie

Wynikiem iloczynu wektorowego dwu dowolnych niewspółliniowych wektorów **a** i **b** jest prostopadły do nich wektor **c**:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (27)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – wektory kierunkowe (wersory) kartezjańskiego układu współrzędnych,

Prawo zachowania momentu pędu

Przypomnienie

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}|\, \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,, \tag{28}$$

lub we współrzędnych

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k\,, \tag{29}$$

gdzie ε_{ijk} – symbol permutacyjny Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} -1 & \text{nieparzysta permutacja i, j, k}\,, \\ 1 & \text{parzysta permutacja i, j, k}\,, \\ 0 & \text{indeksy powtarzają się}\,. \end{cases} \tag{30}$$

Prawo zachowania momentu pędu

Wielkości masowe (objętościowe) i powierzchniowe w ciele $\mathcal{B}$ dla dowolnej jego konfiguracji $\mathcal{B}_t$

Powierzchnia $\partial\mathcal{B}_t$ ciała $\mathcal{B}$ i pola wektorowe $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ – gęstość naprężeń powierzchniowych i $\mathbf{m}_{(\mathbf{n})}$ – gęstość momentów powierzchniowych, $\mathbf{n}$ – wektor normalny do powierzchni, to:

całkowita siła powierzchniowa:

$$\mathbf{F}_s = \int\limits_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t}_{(n)} ds \,, \tag{31}$$

całkowity moment powierzchniowy:

$$\mathbf{M}_s = \int\limits_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{m}_{(n)} ds + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)}) ds \,. \tag{32}$$

Prawo zachowania momentu pędu

W klasycznej teorii sprężystości momenty powierzchniowe $\mathbf{m}_{(n)}$ nie występują. Oznacza to, że istnieje również nieklasyczna teoria ośrodków ciągłych, w której punkty ciała obdarzone są wewnętrzną strukturą i mają dodatkowe trzy stopnie swobody obrotowej. Teoria ta nosi nazwę teorii momentowej lub teorii Cosseratów.

Prawo zachowania momentu pędu

Wypadkowy moment działający na ciało

$$\mathbf{M} = \int_{\mathcal{B}_t} (\rho\,\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \rho\,\mathbf{m}) dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)} + \mathbf{m}_{(n)}) ds \,, \tag{33}$$

ρ – gęstość masy, $\mathbf{r}$ – wektor wodzący względem wybranego przez nas punktu, $\mathbf{f}$ – gęstość sił, $\mathbf{m}$ – gęstość momentów masowych

Prawo zachowania momentu pędu

Moment pędu $\mathbf{W}$ ciała $\mathcal{B}$ w chwili t

$$\mathbf{W} \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \rho\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dv\,, \tag{34}$$

$\mathbf{v}(x, t)$ – prędkość punktu $P(\mathbf{r})$ ciała.

Prawo zachowania momentu pędu

Zasada zachowania momentu pędu mówi, że prędkość zmiany w czasie całkowitego momentu pędu ciała $\mathcal{B}$ względem dowolnie wybranego punktu jest równa wypadkowemu momentowi liczonemu względem tego samego punktu w tej samej chwili t, czyli że

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{M}\,, \tag{35}$$

co oznacza iż

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho\, \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}\, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\rho\, \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \rho\, \mathbf{m}) dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)} + \mathbf{m}_{(n)}) ds\,. \tag{36}$$

Prawo zachowania momentu pędu

Po przejściu do całek objętościowych otrzymujemy lokalną zasadę zachowania momentu pędu

$$\rho\,\mathbf{m} + \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{M}} + \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\,, \tag{37}$$

gdzie $\mathbf{m}_{(n)} = \mathbf{n}\,\boldsymbol{\mathcal{M}}$ ($\boldsymbol{\mathcal{M}}$ – tensor naprężeń momentowych), a $\mathbf{e}$ – tensor trzeciego rzędu. We współrzędnych równanie to zapisuje się następująco:

$$\rho\, m_i + \mathcal{M}_{ji,j} + e_{ijk}\,\sigma_{jk} = 0\,. \tag{38}$$

Spis treści

1 Wstęp
2 Prawa fizyki
3 Prawa zachowania
- Prawo zachowania masy
- Prawo zachowania pędu
- Prawo zachowania momentu pędu
- Prawo zachowania energii mechanicznej

4 Teorie fizyczne
- Mikołaj Kopernik
- Klaudiusz Ptolomeusz
- Gaspard-Gustave de Coriolis
- Jean Bernard Léon Foucault

5 Komputer a teoria fizyczna

Prawo zachowania energii mechanicznej

Wzór $E = m\,c^2$ podaje maksymalną wartość energii jaką może zgromadzić obiekt o masie m. Na energię tę składa się spora liczba różnych energii cząstkowych: energia wewnętrzna, energia swobodna, energia oddziaływania, energia termiczna, energia pola elektromagnetycznego, energia kinetyczna, energia potencjalna i jeszcze wiele innych.Tu zajmiemy się tylko prawem zachowania energii mechanicznej, co oznacza, że wykluczamy z naszych rozważań wszelkie inne pola oprócz mechanicznych.

Prawo zachowania energii mechanicznej

Pomnóżmy równanie (24) przez prędkość $\mathbf{v}$ i scałkujmy po całej objętości materialnej ciała $\mathcal{B}_t$. W wyniku otrzymujemy

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}\, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \rho\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho\, \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}\, dv\,. \tag{39}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej

Twierdzenie Gaussa - Ostrogradzkiego

$\hookrightarrow$ pierwszy składnik

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{v}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{n} \, \boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{v} ds - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \, dv \,, \tag{40}$$

gdzie tensor drugiego rzędu $\operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, $\mathbf{D}$ – tensor prędkości deformacji $\mathbf{D} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$, a $d\mathbf{v} = (\operatorname{grad} \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \mathbf{L} \, d\mathbf{x}$.

Prawo zachowania energii mechanicznej

Inny tensor zbudowany z gradientu prędkości $\mathbf{L}$ to antysymetryczny tensor $\mathbf{W}$ – tensor chwilowej prędkości obrotowej (materialny tensor spinu)

$$\mathbf{W} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)\,, \tag{41}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej

$\mathcal{L}$ – moc pracy sił zewnętrznych

Niech $\mathcal{L}$ będzie mocą pracy sił zewnętrznych działających na ciało $\mathcal{B}_t$

$$\mathcal{L} \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} \, ds \,. \tag{42}$$

Energia kinetyczna ciała

Energią kinetyczną ciała $\mathcal{B}_t$ nazywamy całkę objętościową

$$K \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv \,. \tag{43}$$

Prawo zachowania energii mechanicznej

Wynika stąd, że

$$\dot{K} \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \rho \, \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv \,. \tag{44}$$

Jeśli wykorzystamy teraz równania (40), (42) i (44), to równanie (39) przyjmuje postać

$$\dot{K} = \mathcal{L} - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \, dv \,. \tag{45}$$

Jest to właśnie prawo zachowania energii mechanicznej: **pochodna materialna energii kinetycznej jest równa mocy pracy sił zewnętrznych zmniejszonej o moc sił wewnętrznych, czyli o moc pracy naprężeń na prędkości deformacji**.

Prawo zachowania energii mechanicznej

W przypadku braku deformacji, a więc gdy ciało jest sztywne, albo ruch odbywa się tak, jakby ciało było sztywne, równanie (45) przyjmuje postać

$$\dot{K} = \mathcal{L}\,. \tag{46}$$

Teorie fizyczne

Nieco historii

- Mikołaj Kopernik (19.02.1473 - 24.05.1543)
- Klaudiusz Ptolomeusz (ok. 90 r. n.e. - po 161 r. n e.)
- Gaspard-Gustave de Coriolis (21.05.1792 w Nancy - 19.09.1843 w Paryżu)
- Jean Bernard Léon Foucault (18.09.1819 - 11.02.1868)

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Teorie fizyczne

Mikołaj Kopernik

Kopernik w latach 1491-1495 studiował w Krakowie, a następnie we Włoszech (Bolonia, Padwa, Ferrara). W 1503 doktoryzował się z prawa kanonicznego. W Polsce studiował od 18 do 22 roku życia, ale dyplomu nie zrobił. I wcale nie dlatego, że był mało zdolny. Zwierzył się swemu opiekunowi wujowi Łukaszowi Watzenrode o swych pomysłach dotyczacych astronomii, a ten, by nie stracić szans na czekające go własnie biskupstwo, wysłał młodzieńca za granicę. Po powrocie do Polski Kopernik mieszkał w Lidzbarku Warmińskim, Fromborku (1510) (stanowisko kanonika załatwił mu jego wuj, do jego obowiązków należało wysłuchanie porannej mszy świętej, a resztę dnia mógł poświęcić np. na badania naukowe), Olsztynie (1520-1521, w czasie wojny polsko-krzyżackiej).

Teorie fizyczne

Mikołaj Kopernik

Pracę nad dziełem„ De revolutionibus" rozpoczął Kopernik około 1515 roku i właściwie do końca życia ciągle wnosił do niej poprawki. W maju 1539 roku przybył do Fromborka młody uczony niemiecki Jerzy Joachim von Lauchen zwany Retykiem, który w decydujący sposób przyczynił się do wydania drukiem wielkiego dzieła Mikołaja Kopernika. W roku 1540 Retyk wydał rozprawę pt. "Narratio prima" czyli "Opowiadanie pierwsze", w której obwieścił światu o odkryciach Kopernika. Po długich namowach przekonał Kopernika do wydania drukiem dzieła "De revolutionibus" w Norymberdze, gdyż tam właśnie znajdowała się drukarnia Jana Petreiusa specjalizująca się w druku prac naukowych, a praca Kopernika zawierała wiele wzorów, tablic i rysunków.

Teorie fizyczne

Mikołaj Kopernik

Retyk opuścił Frombork w roku 1541, wioząc do Norymbergii rękopis Kopernika. Dzieło ukazało się drukiem dopiero w 1543 roku, czyli w roku śmierci wielkiego astronoma, pod tytułem "De revolutionibus orbium coelestium libri VI", a dedykowane zostało papieżowi Pawłowi III. Pierwsze wydanie składało się z sześciu ksiąg i 203 kart, a nakład wynosił około tysiąca egzemplarzy. Tytuł został zmieniony bez uzgodnienia z Kopernikiem, gdyż uważano, że pierwotny krótki tytuł był zbyt rewolucyjny.

Spis treści

1 Wstęp
2 Prawa fizyki
3 Prawa zachowania
- Prawo zachowania masy
- Prawo zachowania pędu
- Prawo zachowania momentu pędu
- Prawo zachowania energii mechanicznej

4 Teorie fizyczne
- Mikołaj Kopernik
- Klaudiusz Ptolomeusz
- Gaspard-Gustave de Coriolis
- Jean Bernard Léon Foucault

5 Komputer a teoria fizyczna

Teorie fizyczne

Klaudiusz Ptolomeusz

Wybitny greko - egipski astronom, astrolog, matematyk, geograf i optyk, prawdopodobnie rodem z Ptolemaidy (Tebaidy) w północnym Egipcie. Kształcił się i pracował w Aleksandrii egipskiej, prowadził tam badania astronomiczne w latach 125 - 141 n.e. Prace Ptolomeusza wywarły ogromny wpływ na całą późniejszą astronomię i astrologię. Podsumował on wcześniejsze prace grekojęzycznych astronomów w "Wielkiej matematycznej konstrukcji astronomii w 13 księgach" (grec. "Megale syntaxis" albo "Megiste syntaxis" - "Wielka konstrukcja", lub też "Mathematiké sýntaksis" - "Księga matematyczna"). Dzieło to, zachowane do dziś, znane jako "Almagest" (średniowieczne wypaczenie greckiego tytułu), stanowiło kanon wiedzy astronomicznej przez prawie półtora tysiąca lat. Ptolomejski system świata obowiązywał w astronomii do czasu zastąpienia go przez system świata Kopernika.

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Teorie fizyczne

Gaspard-Gustave de Coriolis

Wywody Kopernika, choć poparte obliczeniami, musiały czekać przeszło trzysta lat na potwierdzenie eksperymentalne, że Ziemia rzeczywiście się obraca. Rozpoczął te prace Gaspard-Gustave de Coriolis, francuski fizyk i matematyk. Wszystko zaczęło się od tego, że jako mały chłopiec był bardzo dynamicznym dzieckiem, a jego matka, gdy już miała wszystkiego dosyć, sadzała go na pół godziny na karuzelę, a potem mały Gaspard-Gustave był już bardzo grzeczny. Gdy nieco wydoroślał, był w latach 1816-1838 zastępcą profesora matematyki w École Polytechnique w Paryżu (najbardziej prestiżowej francuskiej wyższej uczelni). Był również członkiem francuskiej Akademii Nauk. Badał prawa ruchów, zwłaszcza ruchów na powierzchni Ziemi, by sobie wyjaśnić, czemu karuzela tak go w dzieciństwie uspokajała. W mechanice wprowadził termin praca, podał wzór na zmianę prędkości w wyniku wykonania pracy (obecnie nazywa się to energią kinetyczną).

Teorie fizyczne

Gaspard-Gustave de Coriolis

Zjawisko fizyczne, które zostało nazwane od jego nazwiska, czyli **efekt Coriolisa**, występuje w obracających się układach odniesienia, a polega na zaburzeniu toru ciał poruszających się w takich układach. Zaburzenie to wygląda tak, jakby było wywołane jakąś siłą (dlatego efekt Coriolisa nazywany jest najczęściej **siłą Coriolisa**), w rzeczywistości jest jednak spowodowany ruchem układu odniesienia. Wartość tej pozornej siły wynosi

$$\mathbf{F}_C = 2\,m(\mathbf{v} \times \omega)\,, \tag{47}$$

m - masa ciała, $\mathbf{v}$ - jego prędkość, ω - prędkość kątowa układu

Teorie fizyczne

Gaspard-Gustave de Coriolis

Zgodnie ze wzorem (47), jeżeli ciało porusza się z prędkością **v** po promieniu i oddala się od osi obrotu układu odniesienia, to doznaje działania siły prostopadłej do promienia i w stronę przeciwną do obrotu układu odniesienia obracającego się z prędkością kątową ω, jeżeli przybliża się do środka, to siła działa w stronę, w którą obraca się układ. Podobnie, jeżeli ciało zostanie rzucone w kierunku promienia na zewnątrz, to będzie skręcało przeciwnie do kierunku wirowania układu odniesienia. Jeśli zostanie rzucone do wewnątrz, będzie skręcało zgodnie z układem. Zjawisko Coriolisa musi więc również występować na Ziemi, gdyż Ziemia obraca się wokół swojej osi (ze wschodu na zachód, czy z zachodu na wschód?). Na północ od równika siła Coriolisa powoduje zbaczanie poruszających się obiektów w prawo, a na południe - w lewo (patrząc w kierunku równika).

Teorie fizyczne

Gaspard-Gustave de Coriolis

Efekt ten nie jest zazwyczaj odczuwalny, objawia się jedynie przy długotrwałych procesach lub działa na poruszające się bardzo swobodnie ciała. A oto przykłady jego wpływu (z punktu widzenia obserwatora patrzącego w kierunku równika):

- na półkuli północnej wiatr ma tendencję do skręcania w prawo, a na południowej - w lewo;
- na półkuli północnej mocniej podmywane są prawe brzegi rzek (odpowiednio: na południowej - lewe);
- na półkuli północnej wiry wodne oraz antycyklony poruszają się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (na południowej - przeciwnie).

Teorie fizyczne

Rys. 3: Huragan Rita (24.09.2005)

Teorie fizyczne

Przykład 1

Jeśli z określonego miejsca na półkuli północnej zacznie przemieszczać się ku biegunowi masa powietrza, to napływając nad obszary o malejącej prędkości liniowej będzie w stosunku do nich napływać nie z południa, lecz z południowego wschodu. Im dalej, tym większa będzie przewaga kierunku wschodniego. Z punktu widzenia obserwatora na Ziemi wygląda to, jak działanie siły skierowanej ze wschodu na zachód. Siłę tę nazywamy właśnie siłą Coriolisa.

Przykład 2

Ciało upuszczone ze szczytu wieży Eiffela (wysokość 273 m z najwyższego tarasu) spadnie przesunięte o 6,505103512 cm na wschód.

Teorie fizyczne

Gaspard-Gustave de Coriolis

Efekt Coriolisa musi być także brany pod uwagę przez artylerzystów, osoby nawigujące lot samolotów, rakiet, itp. I tak np. efekt Coriolisa zgotował przykrą niespodziankę wojennym okrętom Wielkiej Brytanii podczas konfliktu z Argentyną o Falklandy, gdy strzelając do nadlatujacych argentyńskich samolotów nie zmienili znaku w nastawach poprawki uwzględniającej siłę Coriolisa (poprawki te mają różne znaki na półkuli północnej i południowej) i w rezultacie utracili dwa okręty.

Spis treści

1. Wstęp
2. Prawa fizyki
3. Prawa zachowania
   - Prawo zachowania masy
   - Prawo zachowania pędu
   - Prawo zachowania momentu pędu
   - Prawo zachowania energii mechanicznej
4. Teorie fizyczne
   - Mikołaj Kopernik
   - Klaudiusz Ptolomeusz
   - Gaspard-Gustave de Coriolis
   - Jean Bernard Léon Foucault
5. Komputer a teoria fizyczna

Teorie fizyczne

Jean Bernard Léon Foucault

Pierwszego eksperymentalnego potwierdzenia efektu Coriolisa dla Ziemi dostarczył swym wahadłem Jean Bernard León Foucault (18.09.1819 - 11.02.1868) - fizyk francuski, odkrywca prądów wirowych (zwanych również prądami Foucaulta). Dokonał jednego z pierwszych pomiarów prędkości światła w powietrzu i w wodzie; zbudował pryzmat polaryzacyjny, fotometr i żyroskop. W 1851 roku za pomocą wahadła o 67 metrach długości, mającego możliwość wahań w dowolnej płaszczyźnie pionowej, zawieszonego w paryskim Panteonie, udowodnił ruch obrotowy Ziemi.

Teorie fizyczne

Jean Bernard Léon Foucault

Jeżeli wahadło puścić w ruch, to po pewnym czasie obserwator na Ziemi zauważy, że płaszczyzna wahań zmieniła się. Gdyby zbudować wahadło zdolne do wahań przez 24 godziny i umieścić je na biegunie geograficznym Ziemi i puścić je w płaszczyźnie nieruchomej względem gwiazd, to zawieszenie wahadła, które jest na osi obrotu Ziemi, nie zmieni płaszczyzny wychyleń wahadła i w ciągu doby płaszczyzna jego wahań obróci się względem obserwatora na Ziemi o $360°$. Na mniejszych szerokościach geograficznych obrót będzie odpowiednio wolniejszy (proporcjonalnie do sinusa szerokości). Szybkość obrotu płaszczyzny wahań zależy od szerokości geograficznej φ i wynosi $15° \cdot \sin\varphi$ na godzinę. Na równiku ($\varphi = 0°$) wahadło Foucaulta nie obraca się.

Teorie fizyczne

Jean Bernard Léon Foucault

Obecnie w Panteonie znajduje się wahadło, które demonstruje opisany efekt. Wahadło wyposażone jest w odpowiednie urządzenia, które napędzają je, zapewniając stałą amplitudę wahań, przez co wahadło może poruszać się dowolnie długo.

Wahadła Foucaulta

Można je spotkać w licznych miejscach na świecie (a zwłaszcza w USA). Ze względu na swoje spektakularne wymiary i imponujący wygląd umieszcza się je w miejscach ważnych dla nauki, kultury i polityki (takich jak uniwersytety, muzea, centra kongresowe).

Komputer a teoria fizyczna

Modelowanie

Fizyka jest częścią nauki. Celem nauki jest objaśnianie świata, a więc jego opisywanie, dążenie do zrozumienia opisywanych zjawisk i podejmowanie prób przewidywania przyszłych wydarzeń. Jak dotychczas, wszystkie próby szczegółowego opisania świata kończyły się niepowodzeniem: szczegółów jest za dużo. Musimy więc upraszczać, czyli wybierać do opisu tylko najważniejsze elementy. Taki uproszczony opis to **model zjawiska**, czyli wyróżniony zbiór elementów rzeczywistości i zbiór reguł, jakie nimi rządzą. Należy bardzo uważać, by nie pomylić modelu z rzeczywistością. A to niestety często się zdarza. Nasz umysł też "myśli modelami".

Komputer a teoria fizyczna

Modelowanie

Najważniejszym zadaniem badacza jest umiejętne wyodrębnienie tych elementów, które na obserwowane zjawisko mają największy wpływ. Najszybszy postęp nauki występuje tam, gdzie nauczono się prawidłowo wyodrębniać te najważniejsze czynniki. Korzystna może więc być metodologia badawcza "od prostego do coraz bardziej skomplikowanego".

Komputer a teoria fizyczna

Modelowanie

Jeśli chcemy, by badaniu modelu rzeczywistości pomógł nam komputer, to wpierw musimy zbudować model matematyczny (na ogół jest to układ równań różniczkowo-całkowych z odpowiednimi warunkami początkowo-brzegowymi), a następnie poszukiwać ich numerycznych rozwiązań, dokonać odpowiedniej wizualizacji i co najważniejsze, dokonać interpretacji otrzymanych wyników. Pamiętajmy: komputer pomaga, ale nie zastępuje myśli ludzkiej.

Koniec?

Koniec wykładu 1