Elementy Modelowania Matematycznego
Wykład 1

Prawdopodobieństwo

Romuald Kotowski

Katedra Informatyki Stosowanej

PJWSTK 2009

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Spis treści

Wstęp

Tematyka wykładu

- Modelowanie danych (ilościowe):
  - Metody statystyczne: estymacja parametrów modelu, testowanie hipotez statystycznych
  - Analiza dyskryminacyjna
  - Problemy decyzyjne i klasyfikatory
- Programowanie liniowe i nieliniowe
- Modele kolejkowe
- Modele Markowa
- Modelowanie metodami teorii gier

Losowość

Ilościowe i ścisłe ujęcie losowości prowadzi do rachunku prawdopodobieństwa, a w konsekwencji do budowy modeli probabilistycznych.

Doświadczenie losowe

Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli pomimo przeprowadzania go wielokrotnie w zasadniczo identycznych warunkach, nie możemy przewidzieć pojedynczego wyniku w sposób pewny, a zbiór wszystkich możliwych wyników jest znany i może być określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Losowość

Zdarzenie losowe

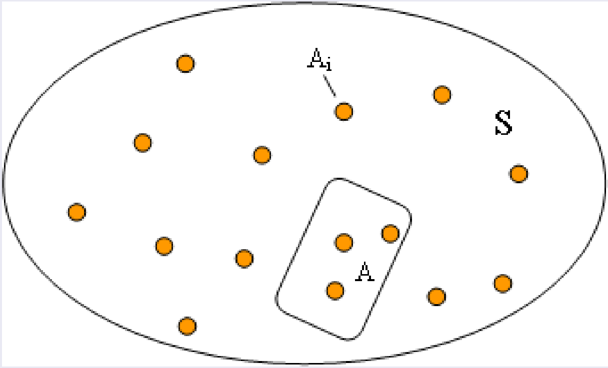
Przestrzeń zdarzeń elementarnych S (przestrzeń próbkowa) – zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego

Zdarzenie elementarne – pojedynczy element przestrzeni zdarzeń elementarnych; ozn. A, B, C, . . .

Zdarzenie – dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych, może być pusty lub obejmować całą przestrzeń zdarzeń elementarnych S

Losowość

Zdarzenie losowe



Rys. 1: S – przestrzeń zdarzeń elementarnych, A – zdarzenie, A_i – zdarzenie elementarne

Rachunek prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo (miara prawdopodobieństwa)

Prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia A jest liczbą rzeczywistą o nstp. właściwościach:

1. dla każdego zdarzenia A, $A \subset S$, gdzie S – przestrzeń zdarzeń elementarnych
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
2. cała przestrzeń zdarzeń elementarnych S stanowi zdarzenie pewne, a zbiór pusty $\emptyset$ stanowi zdarzenie niemożliwe, to
$$P(S) = 1\,, \qquad P(\emptyset) = 0$$
3. jeśli zdarzenia A_1, A_2, A_3,... wzajemnie się wykluczają, to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli wyniki doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne i wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest M, to jeśli zdarzenie A składa się z m elementów (czyli m zdarzeń elementarnych), to

$$P(A) = \frac{m}{M}$$

Uogólnienie klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z N elementów, czyli $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$, i jeśli prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia elementarnego s_i wynosi $P(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, to dla każdego zdarzenia $A \subset S$

$$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(s_i)$$

Powyższe stwierdzenie prawdziwe jest również dla nieskończonej, ale przeliczalnej liczby elementów.

Permutacje

Zadanie 1

Na ile sposobów można wylosować 6 biegaczy spośród 30, i gdy każdemu wylosowanemu biegaczowi przypisujemy kolejny numer toru od 1 do 6?

Ogólnie: na ile sposobów można wylosować po kolei k różnych obiektów bez zwracania spośród n różnych obiektów ($k \leq n$) i gdy istotna jest kolejność, w jakiej obiekty będą wylosowane?

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Gdy $n = k$ możemy utworzyć $n!$ **permutacji** n **obiektów**.

Kombinacje

Zadanie 2

Na ile sposobów można wylosować po kolei k różnych obiektów bez zwracania spośród n różnych obiektów $(k \leq n)$ i gdy nie jest istotna kolejność, w jakiej obiekty będą wylosowane?

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe $P(B|A)$

Postulaty

1. $P(A|A) = 1$
2. $P(B|A) = P(A \cap B|A)$

Wniosek

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia B pod warunkiem zajścia zdarzenia A dane jest wzorem

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Zmienne losowe

Zmienna losowa

Zmienna losowa to dowolna funkcja o wartościach rzeczywistych, określona na zbiorze zdarzeń elementarnych S.

Zmienne losowe

Zmienna losowa dyskretna

Zmienną losową X nazywamy **dyskretną** jeśli przyjmuje wartości ze zboru dyskretnego, czyli albo skończonego albo przeliczalnego.

Zmienna losowa ciągła

Zmienną losową X nazywamy **ciągłą** jeśli dla pewnej nieujemnej funkcji f i dla takich dowolnych liczb a i b, ale takich, że $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ zachodzi równość

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s)\, ds$$

Pomocne definicje

Rozkład prawdopodobieństwa

Rozkład prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej: jakie wartości i z jakim prawdopodobieństwem są przyjmowane przez zmienną losową;

Funkcja prawdopodobieństwa rozkładu:

$$p(x) = P(\text{wszystkie } x \in S \text{ takie, że } X(s) = x)$$

Dystrybuanta

Dystrybuanta funkcji losowej X – funkcja F określona dla dowolnego x jako $F(x) = P(X \leq x)$ Dla dyskretnej zmiennej losowej dystrybuanta to

$$F(x) = \sum_{x_i : x_i \leq x} p(x_i)$$

czyli kumulacja funkcji prawdopodobieństwa

Pomocne definicje

Właściwości dystrybuanty

1. jest funkcją niemalejącą
2. $$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \to \infty \\ 0 & \text{dla } x \to -\infty \end{cases}$$
3. $\bigwedge_{x_0} F(y) \underset{y \to x_0, y > x_0}{\longrightarrow} F(x_0)$

Przykład

Koszykarz wykonuje dwukrotnie rzut osobisty, czyli zbiór zdarzeń elementarnych ma postać

$$S = \{(0,1),(1,0),(1,1),(0,0)\}$$

przy czym

$$X((0,1)) = 1\,,\ \ X((1,0)) = 1\,,\ \ X((1,1)) = 2\,,\ \ X((0,0)) = 0$$

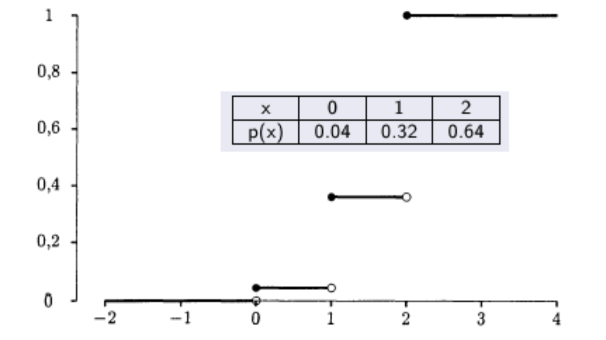
czyli jest to pewna funkcja na zbiorze zdarzeń elementarnych. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo trafienia w każdym rzucie wynosi 0.8, więc

$$\begin{aligned}
p(0) &= P(s \in S:\ \ X(s) = 0) = P((0,0)) = (1-0.8)\times(1-0.8) = 0.04 \\
p(2) &= P(s \in S:\ \ X(s) = 2) = P((1,1)) = 0.8 \times 0.8 = 0.64 \\
p(1) &= P(s \in S:\ \ X(s) = 1) = P((0,1) \vee (1,0)) \\
&= 0.2 \times 0.8 + 0.8 \times 0.2 = 0.32
\end{aligned}$$

x	0	1	2
p(x)	0.04	0.32	0.64

Przykład

Właściwości dystrybuanty



x	0	1	2
p(x)	0.04	0.32	0.64

Rys. 2: Dystrybuanta zmiennej losowej

Pomocne definicje

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X

Wartością oczekiwaną (średnią) zmiennej losowej X o funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $p(\cdot)$ nazywamy liczbę

$$E(X) \doteq \mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p(x_i)$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots$ – różne wartości zmiennej losowej X, k może być równe ∞. Wartość średnia nie musi być równa żadnej faktycznej wartości przyjmowanej przez zmienną losową.

Pomocne definicje

Mediana

Medianą (średnią) zmiennej losowej X nazywamy taką liczbę $q_{0.5}$, że

$$F(X) \leq 0.5 \text{ dla } x < q_{0.5} \quad \wedge \quad F(X) \geq 0.5 \text{ dla } x > q_{0.5}$$

Moda

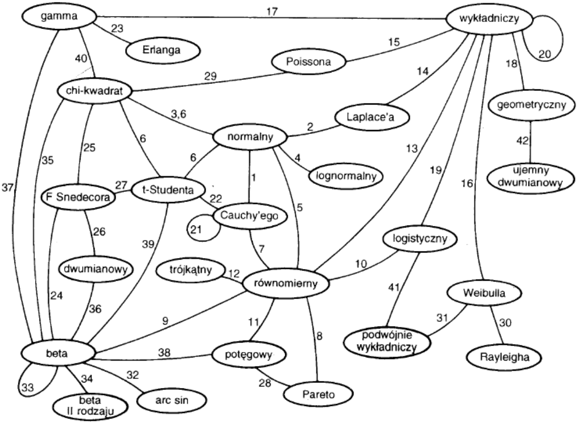
Modą nazywamy dowolne maksimum lokalne $p(\cdot)$, czyli taki dowolny punkt x, że funkcja prawdopodobieństwa dla wartości bezpośrednio poprzedzającej i następującej po x jest mniejsza od $p(x)$

Gęstość zmiennej losowej X

Gęstością zmiennej losowej X (lub gęstością jej rozkładu) nazywamy funkcję $f(s)$ występującą w definicji ciągłej zmiennej losowej

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(s)\, ds$$

Funkcje rozkładu



Rys. 3: Związki pomiędzy rozkładami prawdopodobieństwa [1]

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny

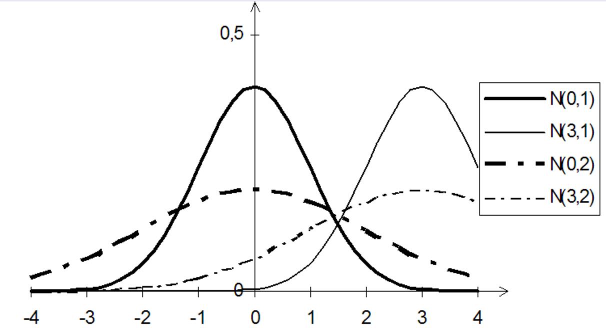
Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego$N(\mu, \sigma)$

$$f_{\mu\sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

gdzie μ – wartość oczekiwana, σ – 0dchylenie standardowe. Jeśli zmienna losowa ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, $(X - \mu)/\sigma)$ ma rozkład normalny $N(0, 1)$.

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny



Rys. 4: Rozkład normalny dla różnych μ i σ

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny

Funkcja gęstości w rozkładzie normalnym:

- jest symetryczna względem prostej $x = \mu$
- w punkcie $x = \mu$ osiąga wartość maksymalną
- ramiona funkcji mają punkty przegięcia dla $x = \mu - \sigma$ i $x = \mu + \sigma$
- kształt funkcji gęstości zależy od wartości parametrów μ i σ. Parametr μ decyduje o przesunięciu krzywej, natomiast parametr σ decyduje o „smukłości” krzywej

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny

Funkcja gęstości rozkładu normalnego ma zastosowanie do tzw. reguły „trzech sigma”, którą następnie rozwinięto na regułę „sześć sigma” – stosowaną w kontroli jakości, przede wszystkim w USA (np. General Electric, General Motors Company)

Reguła „trzech sigma”

Jeżeli zmienna losowa ma rozkład normalny to:

- 68,3% populacji mieści się w przedziale $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$
- 95,5% populacji mieści się w przedziale $(\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)$
- 99,7% populacji mieści się w przedziale $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny

W celu obliczenia prawdopodobieństwa zmiennej X w rozkładzie normalnym o dowolnej wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ dokonuje się standaryzacji, wprowadzając nową zmienną $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ i otrzymujemy rozkład $N(0,1)$.

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < u \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

gdzie ϕ – stablicowane wartości dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego.

Funkcje rozkładu

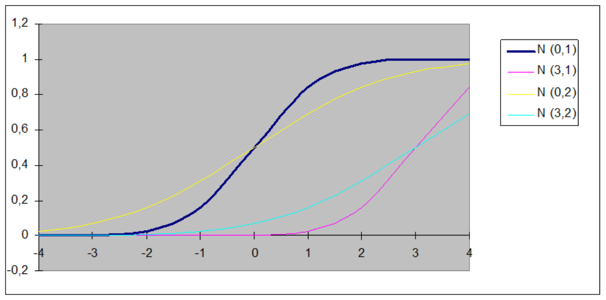
Rozkład normalny

Własności dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego (wynik Centralnego Twierdzenia Granicznego):

$$P(U \leq u) = \phi(u)$$
$$P(U \leq -u) = \phi(-u) = 1 - \phi(u)$$
$$P(U > u) = 1 - P(U \leq u) = 1 - \phi(u)$$
$$P(U > -u) = \phi(u)$$

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny



Rys. 5: Wykres dystrybuanty rozkładu normalnego

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny: Przykład

Wzrost kobiet w pewnej populacji ma rozkład normalny $N(165, 15)$. Oznacza to, iż zmienna losowa, jaką jest wzrost kobiet, ma rozkład normalny ze średnią równą $\mu = 165$ cm i odchyleniem standardowym równym $\sigma = 15$ cm.
Jaki jest udział w populacji kobiet o wzroście:
a) do 160 cm

$$P(X \leq 160) = P\left(\frac{X-165}{15} \leq \frac{160-165}{15} = P(U \leq -0.33 = \right)$$

$$\phi(-0.33) = 1 - \phi(0.33) = 1 - 0.6293 = 0.3707$$

Funkcje rozkładu

Rozkład normalny: Przykład c.d.

b) w przedziale 165 – 170 cm

$$P(165 \leq 170) = P\left(\frac{165-165}{15} \leq \frac{X-165}{15} \leq \frac{170-165}{15}\right) =$$

$$P(0 < U \leq 0.33 = \phi(0.33) - \phi(0) = 0.6293 - 0.5 = 0.1293$$

c) powyżej 175 cm

$$P(X > 175) = P\left(\frac{X-165}{15} < \frac{175-165}{15}\right) = P(U > 0.67) =$$

$$1 - P(U \leq 0.67) = 1 - \phi(0.67) = 1 - 0.748571 = 0.251429$$

Funkcje rozkładu

Rozkład logarytmiczno-normalny

Jeżeli logarytm zmiennej losowej ciągłej ma rozkład normalny, to mówimy, że ta zmienna losowa ma rozkład logonormalny opisany funkcją:

$$f(\ln x) = \frac{1}{x\sigma_{\ln x}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_{\ln x})^2}{2\sigma_{\ln x}^2}\right)$$

Wyznaczenie parametrów rozkładu logarytmiczno - normalnego, czyli: wartości oczekiwanej, wariancji, odchylenia standardowego jest bardzo skomplikowanie numerycznie i w praktyce nie da się tego zrobić bez użycia komputera i odpowiedniego oprogramowania.

Funkcje rozkładu

Rozkład Poissona

Rozkład Poissona – rozkład dyskretny przedstawiający liczbę wystąpień zjawiska w czasie t, w określonej liczbie prób, jeśli wystąpienia te są niezależne od siebie. Rozkład ma zastosowanie do obliczenia przybliżonej wartości prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym przy dużej liczbie prób i niskim prawdopodobieństwie sukcesu.
Rozkład Poissona jest określany przez jeden parametr λ, który ma interpretację wartości oczekiwanej. Parametr ten jest równy prawdopodobieństwu uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie pomnożony przez liczbę prób.

Funkcje rozkładu

Parametry rozkładu Poissona 1

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

dla $\lambda \in (0, \infty)$

Dystrybuanta

$$\frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda))}{\lfloor k \rfloor !}$$

gdzie $\Gamma(x, y)$ – niekompletna funkcja gamma

Funkcje rozkładu

Parametry rozkładu Poissona 2

Mediana

$$\approx \lfloor \lambda + \frac{1}{3} - \frac{0.02}{\lambda} \rfloor$$

Mody

$\lfloor i\lambda \rfloor$ i $\lambda - 1$
gdzie λ jest całkowite

Wariancja λ

Współczynnik skośności $\lambda^{-1/2}$

Kurtoza – miara spłaszczenia rozkładu $Kurt = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\lambda}$
gdzie μ_4 – czwarty moment centralny, σ – odchylenie standardowe

Funkcje rozkładu

Parametry rozkładu Poissona 3

Entropia

$$\lambda(1 - \ln \lambda) + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$$

Entropia dla dużych λ:

$$\frac{1}{2}\log(2\pi e\lambda) - \frac{1}{12\lambda} - \frac{1}{24\lambda^2} - \frac{19}{36 - \lambda^3} + O(1/\lambda^4)$$

Funkcja generująca momenty $\exp(\lambda(e^t - 1))$

Funkcja charakterystyczna $\exp(\lambda(e^{it} - 1))$

Literatura

[1] R. Wieczorkowski, R. Zieliński, Komputerowe generatory liczb losowych, WNT, 1997

Koniec?

Koniec wykładu 1